PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

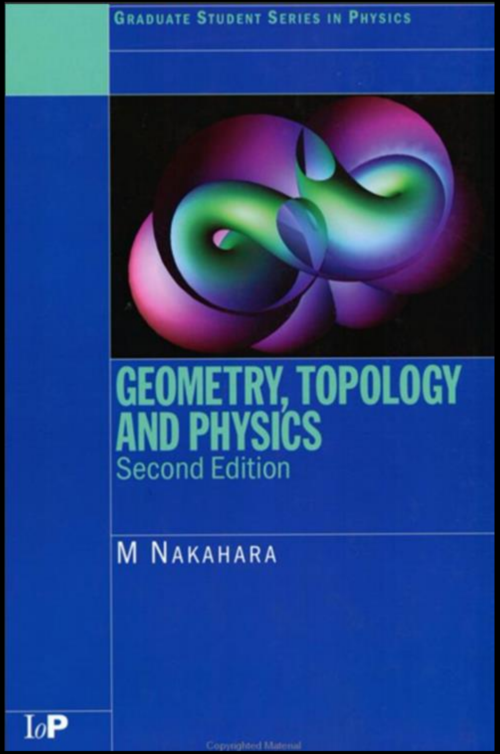
Relatividad General

2025

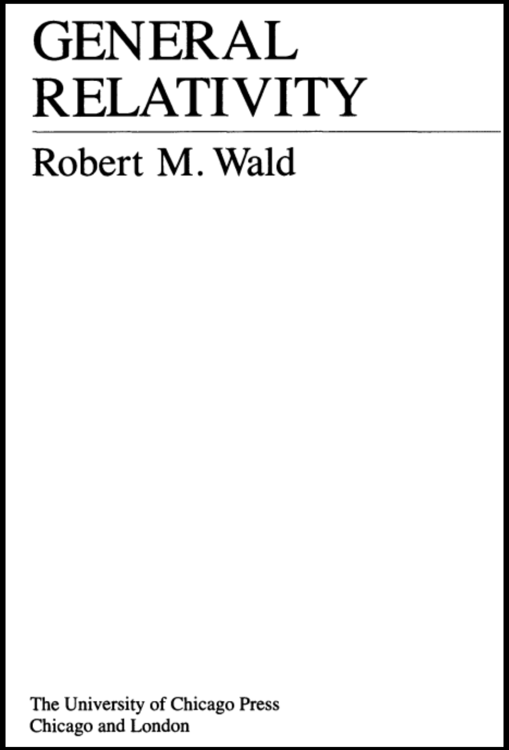
Prof. David Choque Q.

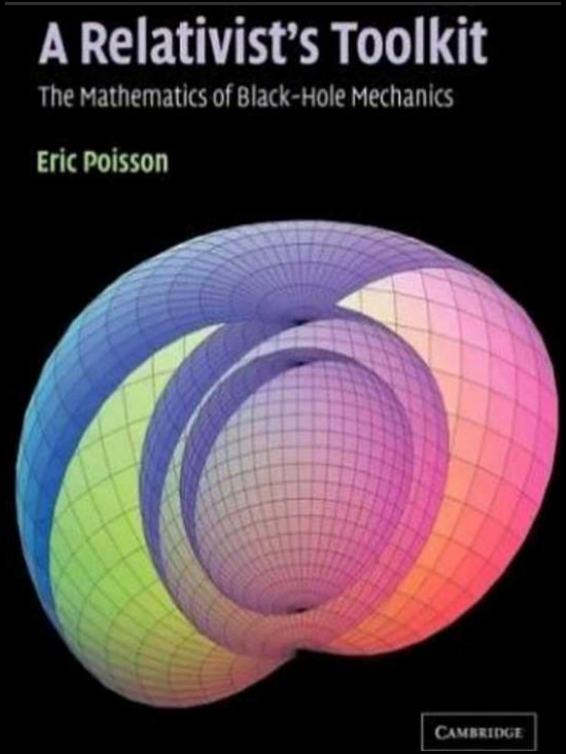
Plan del taller

- Introducción de conceptos sobre geometría diferencial
- Espacio tangente, cotangente, vectores, tensores y formas diferenciales
- Variedades Riemanianas, transporte, transporte paralelo y geodésicas
- Conexión métrica, tensor de Riemann, tensor de torsión, identidades de Bianchi y tensor de Einstein
- Base no coordenada (no-holonoma) , coeficienes de anholonomia, conexión base coordenada y no coordenada, ecuaciones de estructura de Cartan 6) integracion de formas diferenciales, simbolo y tensor de levi-civita 7)Descompoision de la conexion, Accion de Hilbert-Einstein, conexion de Weitzenböck, Accion de la gravedad teleparalela

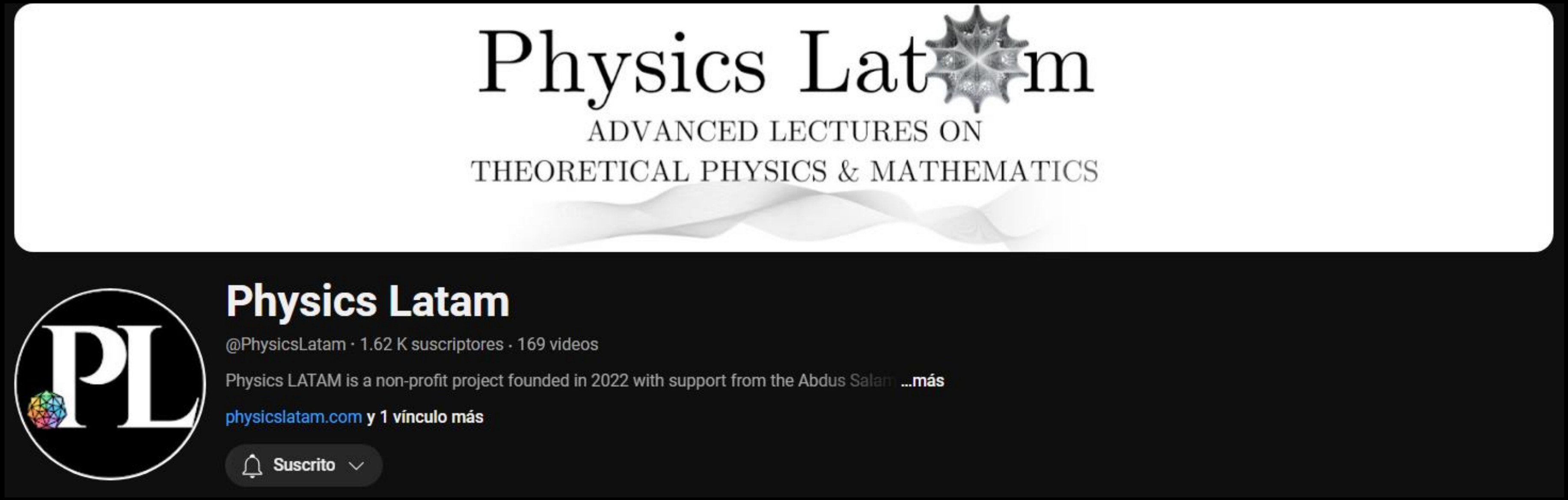

GRADUATE STUDENT SERIES IN PHYSICS
GEOMETRY, TOPOLOGY AND PHYSICS
Second Edition
M NAKAHARA
IoP


Einstein Gravity in a Nutshell
A. Zee


GENERAL RELATIVITY
Robert M. Wald
The University of Chicago Press
Chicago and London

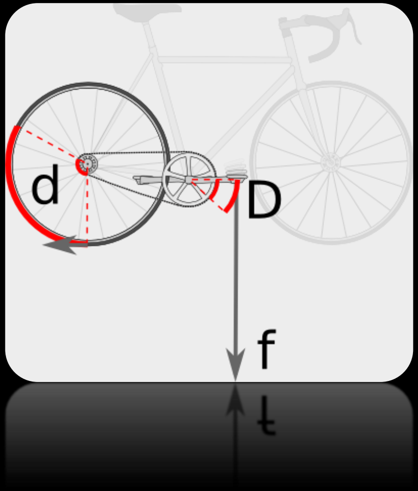

A Relativist's Toolkit
The Mathematics of Black-Hole Mechanics
Eric Poisson
CAMBRIDGE


Spacetime and Geometry
An Introduction to General Relativity
Sean Carroll
Pearson New International Edition


Physics Latam
ADVANCED LECTURES ON
THEORETICAL PHYSICS & MATHEMATICS
PL
Physics Latam
@PhysicsLatam · 1.62 K suscriptores · 169 videos
Physics LATAM is a non-profit project founded in 2022 with support from the Abdus Salam ...más
physicslatam.com y 1 vínculo más
Suscrito

Mecánica Clásica

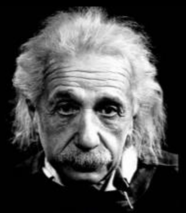
- Velocidades pequenas en comparación a la velocidad de la luz v≪ c .
- Campos gravitacionales, débiles.



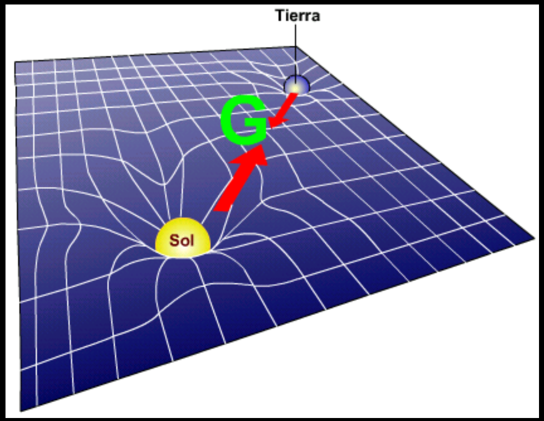
Relatividad Especial

- Velocidades comparables a la luz, v≤ c .
- Campos gravitacionales débiles.
- El tiempo no es absoluto (nueva coordenada).

Relatividad General



- Teoría de gravitación que se aplica en todos los regímenes, débiles o fuertes
- En ciertos regímenes se puede recuperar las anteriores teorías.
- El espacio tiempo es curvo.

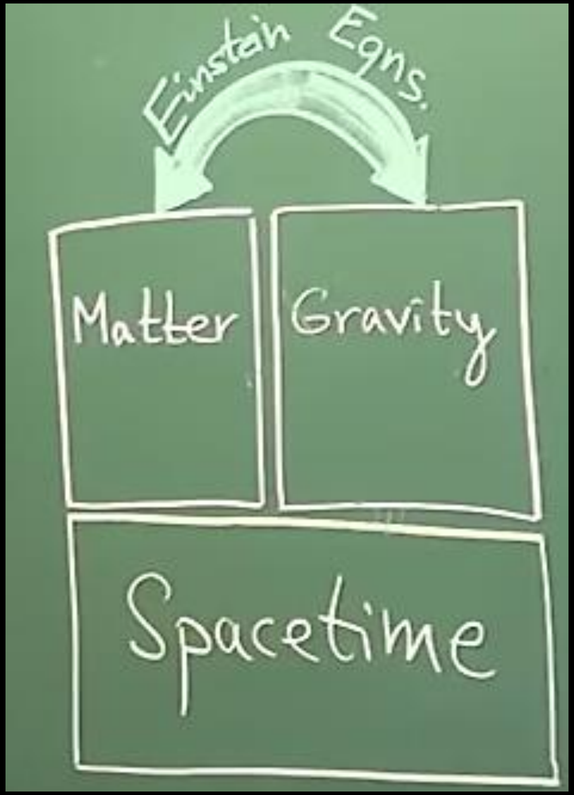


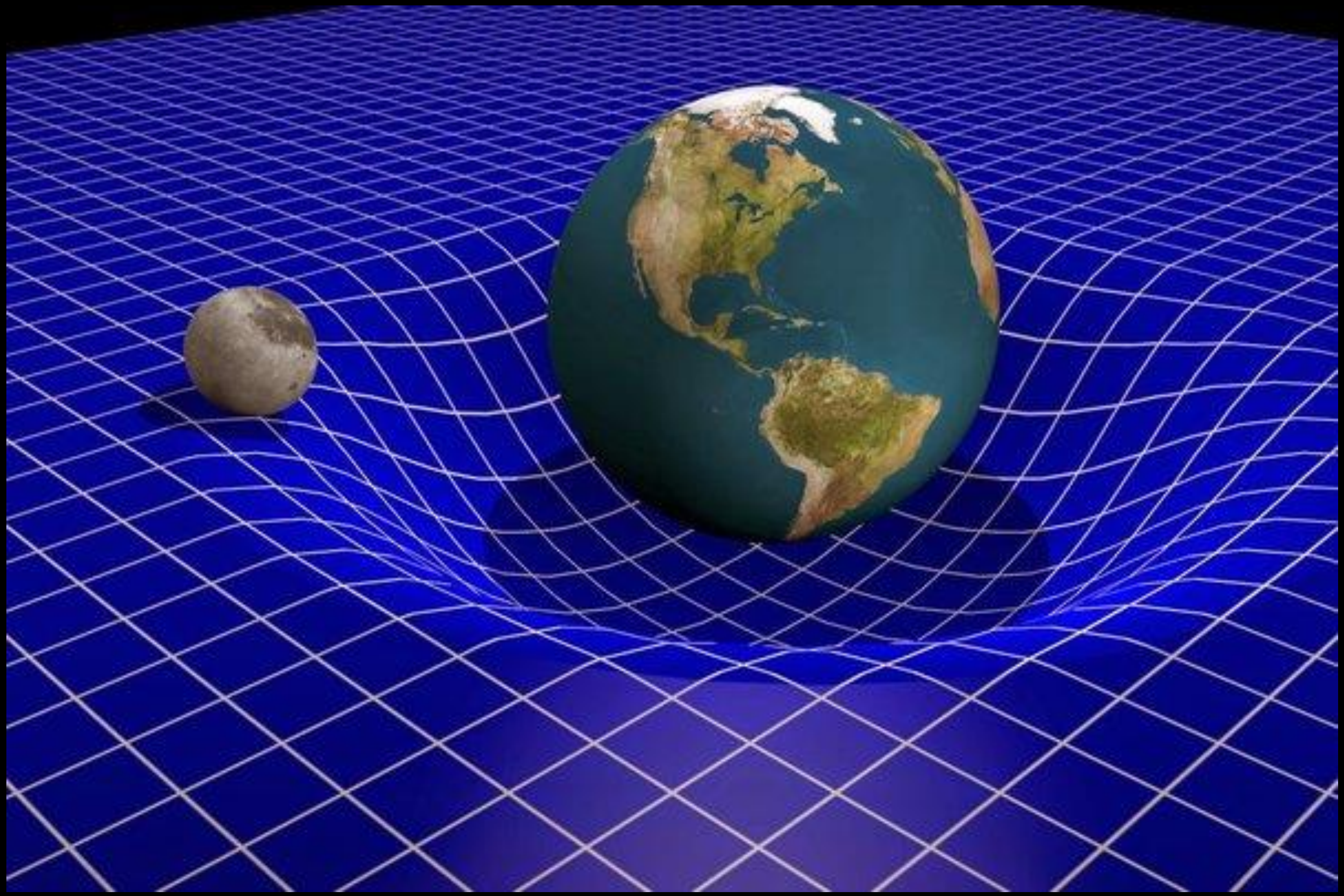
Existira un nuevo paradigma aparte de la curvatura tal que se tenga un transporte paralelo no-trivial?

Definicion del espacio-tiempo fisico

Physical key definition underlying all modern physics

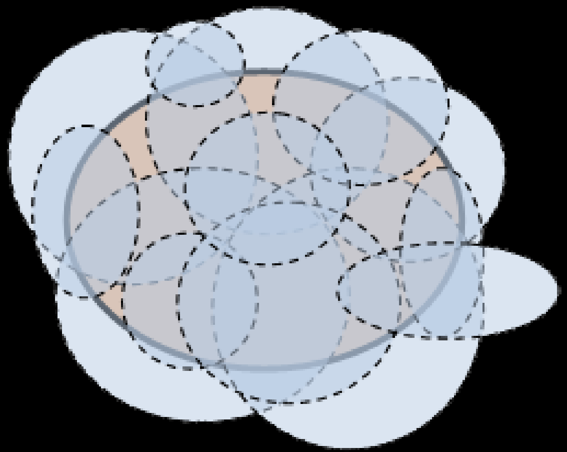
"Spacetime is a four-dimensional topological manifold with a smooth atlas carrying a torsion-free connection compatible with a Lorentzian metric and a time orientation satisfying the Einstein equations"





Espacios topologicos

+



(M,O)
Espacio Topologico

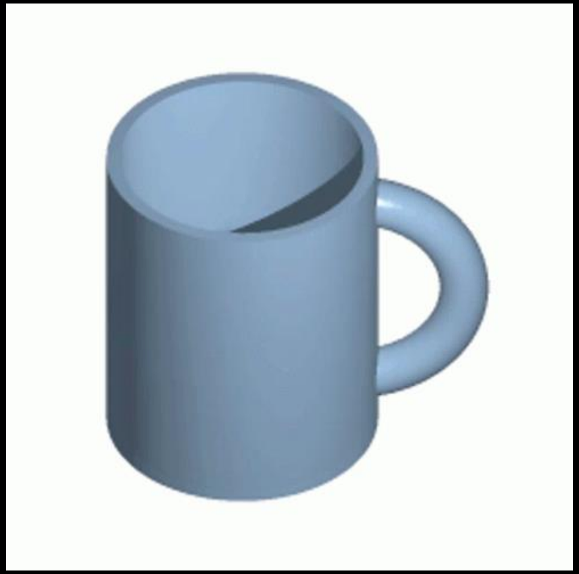
Continuous maps:

Definición 2.4. Sean X y Y espacios topológicos. Una aplicación $f : X \to Y$ es **continua** si la imagen inversa de un conjunto abierto en Y es un conjunto abierto en X.

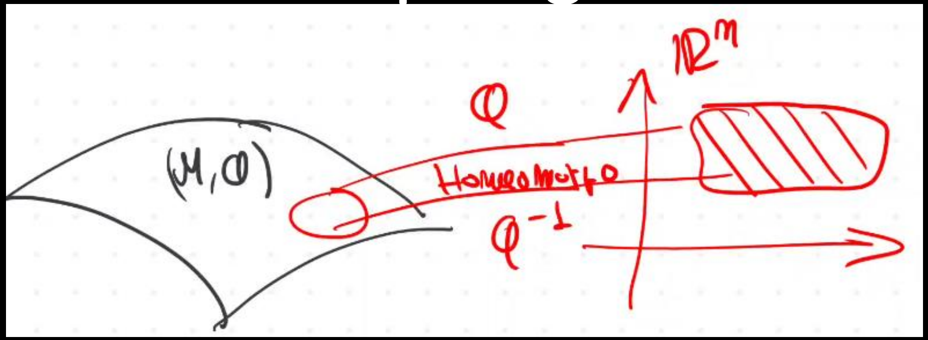
Homeomorphism

Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es un **homeomorfismo** si cumple las siguientes condiciones:

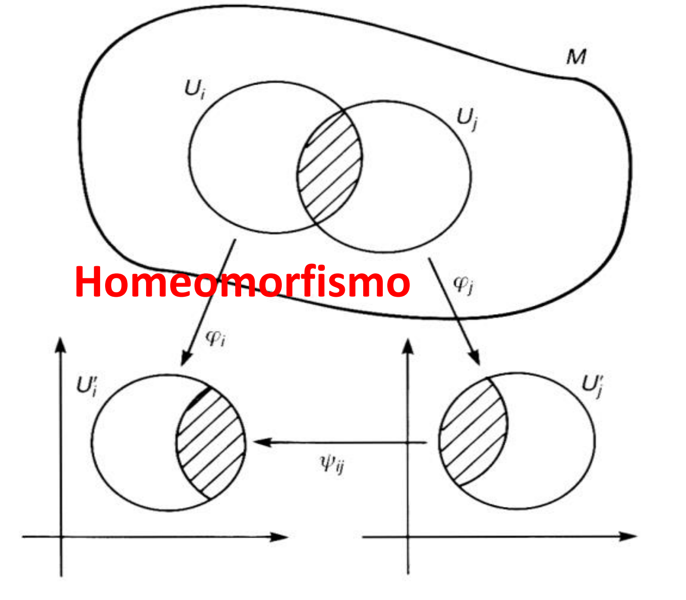
1. **Biyectiva**: La función f es una biyección, es decir, es inyectiva (uno a uno) y sobreyectiva (sobre).
2. **Continua**: La función f es continua, lo que significa que para cada conjunto abierto $V \subseteq Y$, la preimagen $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en X.
3. **Inversa continua**: La función inversa $f^{-1} : Y \to X$ también es continua.



Variedad topológica



Localmente euclidiana: Para cada punto $p \in M$, existe un entorno abierto U que contiene a p tal que U es homeomorfo a un subconjunto abierto del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, donde n es la dimensión de la variedad.



Variedad diferenciable:

M es una variedad diferenciable de dimensión m si:

(i) M es un espacio topológico;

(ii) M está provisto de una familia de pares $\{(U_i, \varphi_i)\}$;

(iii) $\{U_i\}$ es una familia de conjuntos abiertos que cubre M, es decir, $\bigcup_i U_i = M$. Cada φ_i es un homeomorfismo desde U_i a un subconjunto abierto U_i' de $\mathbb{R}^m$;

Difeomorfismo:

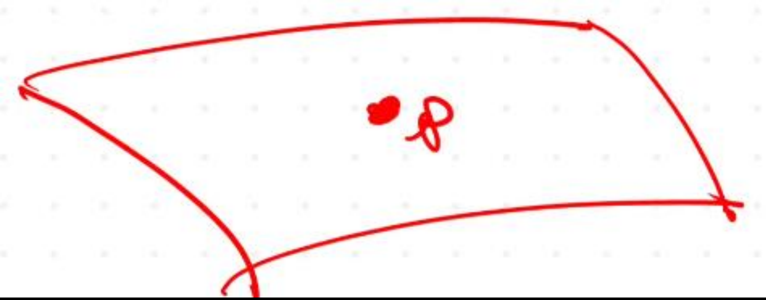
Es una función que establece una equivalencia fuerte entre dos variedades diferenciables, mostrando que no solo son homeomorfas (es decir, topológicamente equivalentes), sino que también tienen estructuras diferenciables equivalentes.

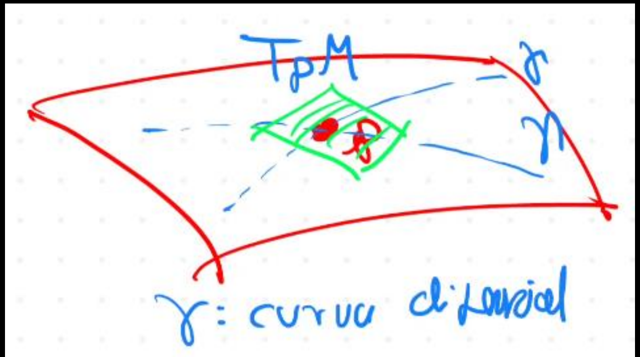
1. **Biyectiva**: f es una biyección, lo que significa que es a la vez inyectiva (uno a uno) y sobreyectiva (sobre).
2. **Diferenciable**: f es diferenciable, lo que significa que existen derivadas de todas las órdenes en todas partes en M.
3. **Inversa diferenciable**: La función inversa $f^{-1} : N \to M$ también es diferenciable.

Vectores

Definición Formal:

Sea M una variedad diferenciable y p un punto en M. El **espacio tangente** de M en el punto p, denotado por T_pM, es un espacio vectorial que "toca" la variedad en p y captura todas las posibles direcciones en las que uno puede pasar a través de p en M.





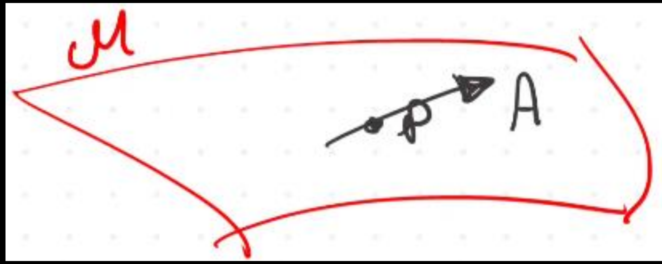
Coordenadas locales:

- Si $\{x^1, \dots, x^n\}$ son coordenadas locales en un entorno de p en M, entonces el espacio tangente T_pM tiene una base natural dada por los operadores diferenciales $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ evaluados en p.
- Cualquier vector tangente $v \in T_pM$ puede expresarse como una combinación lineal de estos operadores:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

donde v^i son los componentes del vector tangente en esta base.

Base coordenada



$\{x^\mu\}$: Carta local

Base T_pM : $\{\partial_\mu\}$

$$A = \sum A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$A = A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$A = A^\mu \partial_\mu$$

Sean dos cartas locales o "sistemas de coordenadas" :

$\{x^\mu\}$; $\{x'^\mu\}$

$\{x, y\}$; $\{r, \theta\}$

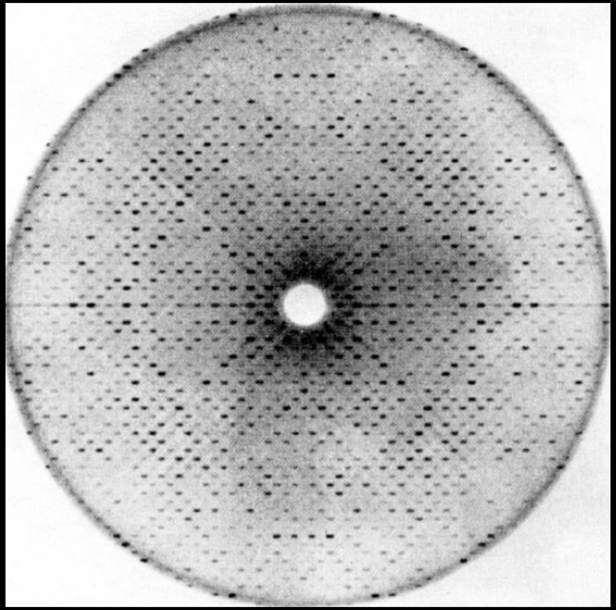
$$\left\{ \text{tal que} \left\{ \begin{array}{l} x^\mu(x'^\mu) \\ x'^\mu(x^\mu) \end{array} \right. \right.$$

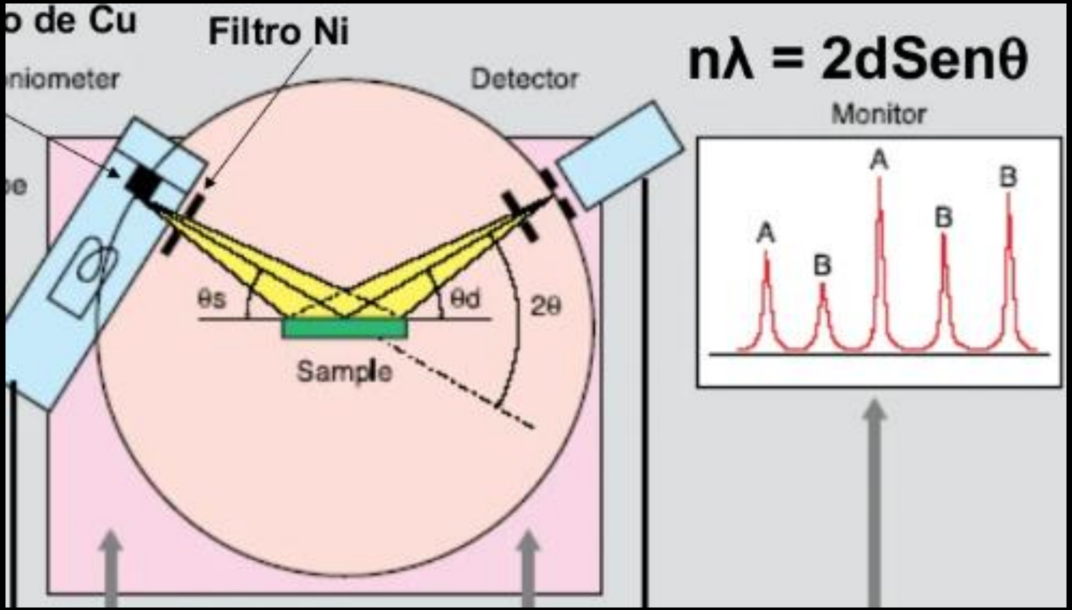
$$A = A^\mu \partial_\mu = A'^\mu \partial'_\mu$$

$$A = A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = A^\mu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = A'^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

$$A^\mu(x) \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = A'^\nu(x')$$

Red recíproca





$$\mathbf{a}^* = 2\pi\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}, \qquad \mathbf{b}^* = 2\pi\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{a}}, \qquad \mathbf{c}^* = 2\pi\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{a}^*\cdot\mathbf{b} = 0; \mathbf{a}^*\cdot\mathbf{c} = 0; \mathbf{b}^*\cdot\mathbf{a} = 0; \mathbf{b}^*\cdot\mathbf{c} = 0; \mathbf{c}^*\cdot\mathbf{a} = 0; \mathbf{c}^*\cdot\mathbf{b} = 0$$

$$\mathbf{a}^*\cdot\mathbf{a} = 2\pi; \mathbf{b}^*\cdot\mathbf{b} = 2\pi; \mathbf{c}^*\cdot\mathbf{c} = 2\pi$$

Espacio tangente dual

T^*_pM ; base $\{dx^\mu\}$ $\Rightarrow$ $\omega = \omega_\mu dx^\mu$

Producto interno:

$\langle\, ,\, \rangle : T^*_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$

$\langle dx^\mu, \partial_\nu \rangle = \delta^\mu{}_\nu$

$\langle \omega, A \rangle = \langle \omega_\mu dx^\mu, A^\nu \partial_\nu \rangle$

$= \omega_\mu A^\nu \langle dx^\mu, \partial_\nu \rangle$

$= \omega_\mu A^\nu \delta^\mu{}_\nu$

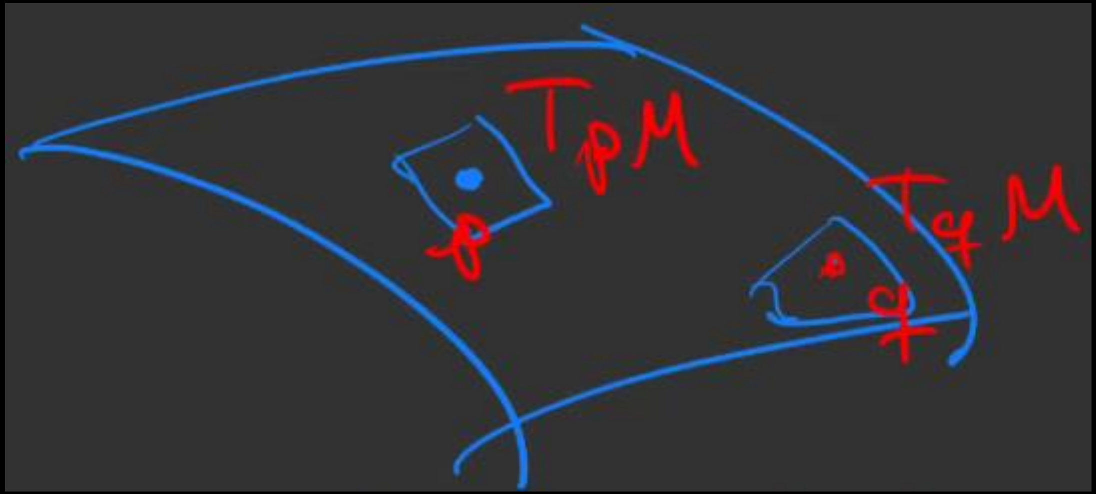
$\langle \omega, A \rangle = \omega_\mu A^\mu$

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \omega'_\nu dx'^\nu$$

$$x^\mu(x'^\nu)$$

$$\omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu = \omega'_\nu dx'^\nu$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \omega'_\nu}$$



tangent bundle $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$

cotangent bundle $T^*M = \bigcup_{p \in M} T^*_pM$

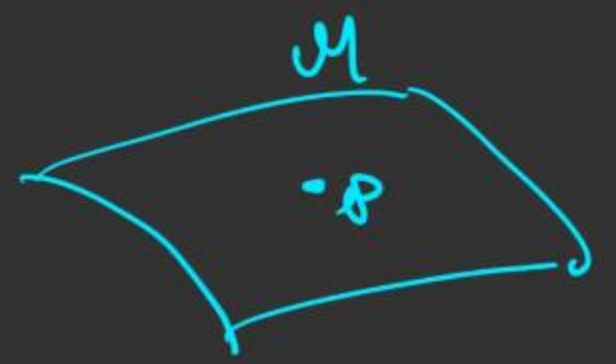
Tensores

$$A = A^{\mu\nu}\,\partial_\mu \otimes \partial_\nu = A_{\mu\nu}\,dx^\mu \otimes dx^\nu = A^\mu{}_\nu\, dx^\nu \otimes \partial_\nu$$

$(2,0)$ contravariante

$(0,2)$ covariante

$(1,1)$ mixto



$$T_p\mathcal{M} \otimes T_p\mathcal{M} =: \{\partial_\mu\} \otimes \{\partial_\nu\}$$
$$=: \{\partial_\mu \otimes \partial_\nu\}$$

$$T_p^*\mathcal{M} \otimes T_p\mathcal{M} =: \{dx^\mu\} \otimes \{\partial_\nu\}$$
$$=: \{dx^\mu \otimes \partial_\nu\}$$

$$T_p^*\mathcal{M} \otimes T_p^*\mathcal{M} =: \{dx^\mu\} \otimes \{dx^\nu\}$$
$$=: \{dx^\mu \otimes dx^\nu\}$$

Tensores

Un **tensor** de tipo (q,r) es un objeto multilineal que asigna q elementos de T_p^*M y r elementos de T_pM a un número real. $\mathcal{T}_{r,p}^{q}(M)$ denota el conjunto de tensores de tipo (q,r) en $p \in M$. Un elemento de $\mathcal{T}_{r,p}^{q}(M)$ se escribe en términos de las bases descritas anteriormente como

$$\left(\otimes^q T_p^* \mathcal{M}\right) \otimes \left(\otimes^r T_p \mathcal{M}\right) = T^q_{p,r} \mathcal{M}$$

$$T = T^{\mu_1 \cdots \mu_q}{}_{\nu_1 \cdots \nu_r}\, \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_q} \otimes dx^{\nu_1} \cdots dx^{\nu_r}$$

Propiedad de simetría de los tensores

Para $\omega \in \mathcal{T}_{r,p}^{0}(M)$, el **simetrizador** $\mathcal{S}$ se define por

$$\mathcal{S}\omega = \frac{1}{r!}\sum_{P\in S_r} P\omega$$

$$\operatorname{sgn}(P) = \begin{cases} \text{permutaciones pares} : +1 \\ \text{permutaciones impares} : -1 \end{cases}$$

mientras que el **antisimetrizador** $\mathcal{A}$ es

$$\mathcal{A}\omega = \frac{1}{r!}\sum_{P\in S_r} \operatorname{sgn}(P) P\omega$$

Ejemplo-simetrizando:

$$T = T_{\mu\nu}\, dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} \qquad (0,2)$$

$$ST = T_{\mu\nu}\, S\left(dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}\right)$$

$$ST = T_{\mu\nu}\, \frac{1}{2!}\left(dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} + dx^{\nu} \otimes dx^{\mu}\right)$$

$$ST = \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu}\, dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} + T_{\mu\nu}\, dx^{\nu} \otimes dx^{\mu}\right)$$

$$ST = \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu}\, dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} + T_{\nu\mu}\, dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}\right)$$

$$ST = \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}\right) dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}$$

Ejemplo-anti-simetrizando:

$$T = T_{\mu\nu}\, dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}$$

$$\mathcal{A}T = T_{\mu\nu}\, \mathcal{A}(dx^{\mu} \otimes dx^{\nu})$$

$$AT = T_{\mu\nu}\, \frac{1}{2!}(dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} - dx^{\nu} \otimes dx^{\mu})$$

$$AT = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu}\, dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} - T_{\mu\nu}\, dx^{\nu} \otimes dx^{\mu})$$

$$AT = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu}\, dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} - T_{\nu\mu}\, dx^{\mu} \otimes dx^{\nu})$$

$$AT = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})\, dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}$$

Formas diferenciales

$$dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p} = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} dx^{\sigma(\mu_1)} \otimes \ldots \otimes dx^{\sigma(\mu_p)}$$

$$dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} - dx^{\nu} \otimes dx^{\mu}$$

$$dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \wedge dx^{\lambda} = dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} \otimes dx^{\lambda} - dx^{\mu} \otimes dx^{\lambda} \otimes dx^{\nu} - dx^{\nu} \otimes dx^{\mu} \otimes dx^{\lambda} + dx^{\nu} \otimes dx^{\lambda} \otimes dx^{\mu} + dx^{\lambda} \otimes dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} - dx^{\lambda} \otimes dx^{\nu} \otimes dx^{\mu}$$

Sea $T \in \Lambda^p(M)$ / $p \leq \dim(M)$

p-Forma: Es un tensor T totalmente anti-simétrico del tipo $(0, p)$

$p \leq \mathrm{Dim}(M)$

$$T = \frac{1}{p!} T_{\mu_1 \ldots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \ldots \wedge dx^{\mu_p}$$

$$T = T_{\mu\nu}\, dx^\mu \otimes dx^\nu \quad \begin{cases} \mathcal{A}T = \frac{1}{2!} T_{\mu\nu}\left(dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu \right) \\ \mathcal{S}T = \frac{1}{2!} T_{\mu\nu}\left(dx^\mu \otimes dx^\nu + dx^\nu \otimes dx^\mu \right) \end{cases}$$

$$\boxed{dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu \equiv dx^\mu \wedge dx^\nu}$$

2-forma $T = \frac{1}{2!} T_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$

En $\mathbb{R}^2$: $\{dx, dy\}$

$$\boxed{dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu \equiv dx^\mu \wedge dx^\nu}$$

$$\begin{cases} dx \wedge dx = 0 \\ dy \wedge dy = 0 \\ dx \wedge dy = -dy \wedge dx \end{cases}$$

La dimension de una forma diferencial es menor o igual a la dimension de la variedad

Sea $\alpha \in \Lambda^p(M)$ $\quad \gamma \in \Lambda^r(M)$

$\beta \in \Lambda^q(M)$

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} = 0 \iff \mu_i = \mu_j$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha \wedge \alpha &= 0 \\ \alpha \wedge \beta &= (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha \\ (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma &= \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \end{aligned}\right\} \text{Demuestra para } p\text{-forma}$$

Sea p-forma : $\omega = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots dx^{\mu_p}$

q-forma : $\eta = \frac{1}{q!} \eta_{\nu_1 \dots \nu_q} dx^{\nu_1} \wedge \dots dx^{\nu_q}$

$(p+q)$-forma: $\omega \wedge \eta = \frac{(p+q)!}{p!\,q!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \eta_{\nu_1 \dots \nu_q} \underbrace{dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots dx^{\nu_q}}_{\substack{(p+q)! \\ \text{permutaciones}}}$

$$\Lambda^p(M) \Rightarrow \begin{matrix} \mathrm{Dim}(M) = m \\ p : p\text{-forma} \end{matrix} \Rightarrow \mathrm{Dim}\left[\Lambda^p(M)\right] = \binom{m}{p}$$

$$\binom{m}{p} \begin{matrix} \to \text{dimensión}(M) \\ \to p\text{-forma} \end{matrix} \to \binom{m}{p} = \frac{m!}{(m-p)!\,p!}$$

$$\mathrm{Dim}\left[\Lambda^p(M)\right] = \binom{m}{p} = \binom{m}{m-p} = \mathrm{Dim}\left[\Lambda^{m-p}(M)\right]$$

$M \equiv \mathbb{R}^2$

$$\mathrm{Dim}\left[\Lambda^p(M)\right] = \binom{2}{p} = \mathrm{Dim}\left[\Lambda^{2-p}(M)\right]$$

$$\mathrm{Dim}\left[\Lambda^0(M)\right] = \binom{2}{0} = 1 \equiv \mathbb{R} \qquad f(x,y)$$

$$\mathrm{Dim}\left[\Lambda^1(M)\right] = \binom{2}{1} = 2 \equiv T^* \mathbb{R}^2 \qquad T = T_\mu dx^\mu$$

$$\mathrm{Dim}\left[\Lambda^2(M)\right] = \binom{2}{2} = 1 \equiv \mathbb{R} \qquad T = T(x,y)\, dx \wedge dy$$

Derivada Exterior

$$d: \Lambda^{p}(M) \to \Lambda^{p+1}(M)$$

$$d =: \underbrace{dx^{\nu}}_{\text{base}} \wedge \underbrace{\partial_{\nu}}_{\text{operador}}$$

p-forma

$$\omega = \frac{1}{p!}\, \omega_{\mu_1 \dots \mu_p}\, dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$$

p+1-forma

$$d\omega = \frac{1}{p!}\, \partial_{\nu}(\omega_{\mu_1 \dots \mu_p})\, dx^{\nu} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$$

Demostrar: $\alpha \in \Lambda^{p}(M)$

$\beta \in \Lambda^{q}(M)$

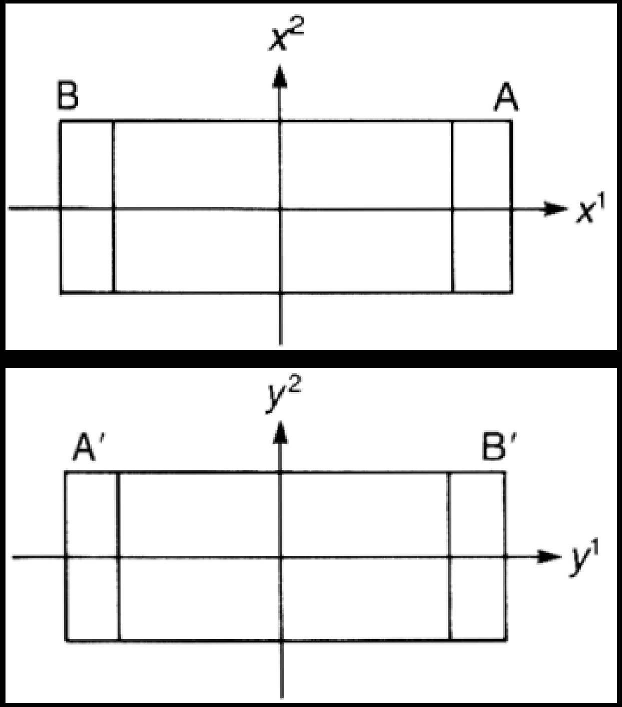
$$d(d\alpha) = d^2\alpha = 0$$

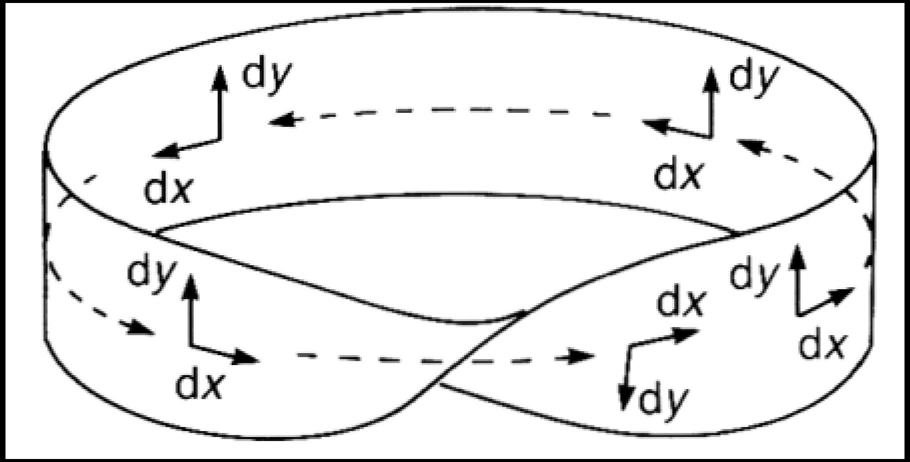
$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{p}\, \alpha \wedge (d\beta)$$

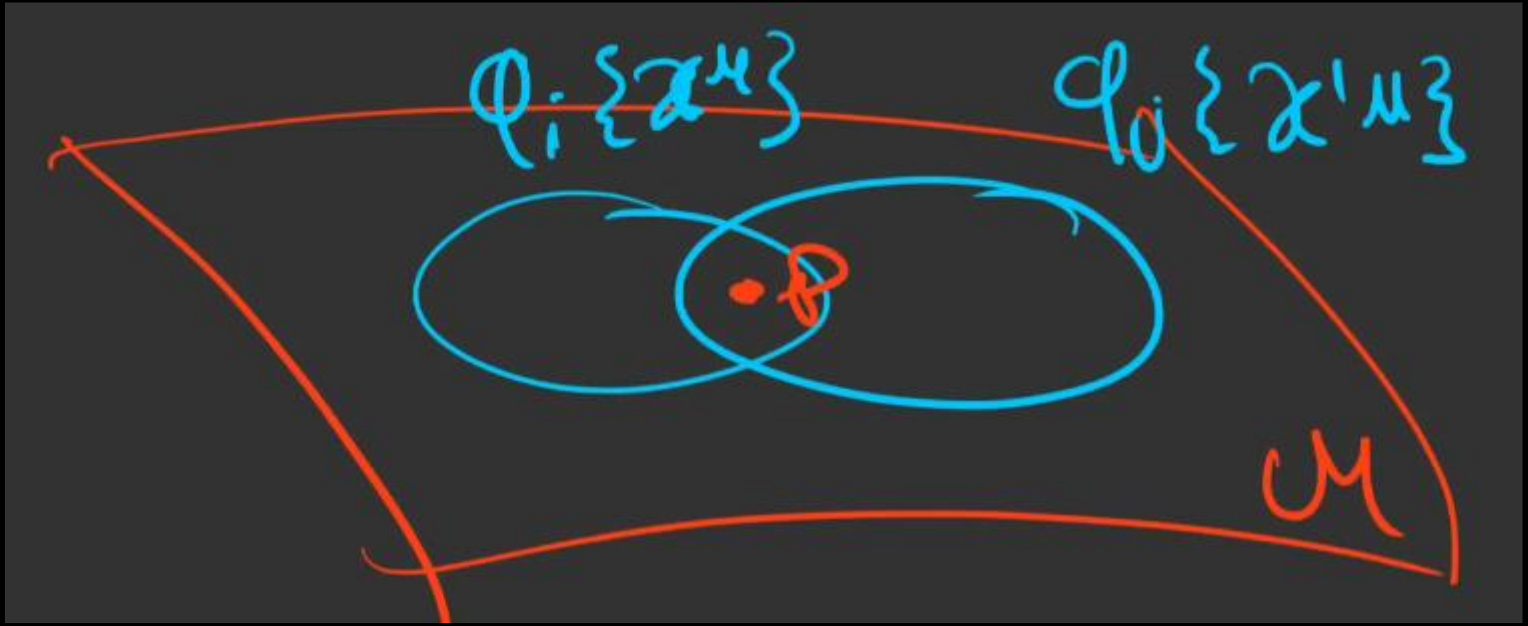
Orientabilidad

Si $\det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\right) > 0$ en $U_i \cap U_j$ $\Rightarrow$ Se dice que las bases $\left\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right\}$ y $\left\{\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right\}$ definen la misma orientación en $U_i \cap U_j$

Si $\det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\right) < 0$ en $U_i \cap U_j$ $\Rightarrow$ orientación opuesta







$$\partial_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\,\partial'_\alpha$$

$$\det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\right) > 0$$

$\mathcal{M}$ es orientable

Si $\mathcal{M}$ es una variedad diferencial m-dimensional "orientable"

$\exists$ una m-forma "Elemento de volumen ω"

$$\omega = h(p)\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

$$\int_{U_i} f\,\omega = ¿?$$