XXXI Simposio Peruano de Física

De la gravedad newtoniana a la gravedad de Newton-Cartan

O. A. Acevedo[1,a], **B. M. Pimentel**[2,b], **A. A. Trigoso Sulca**[3,c]

[1] *Facultad de Ciencias Físicas (FCF), Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM), Lima, Perú*
[2] *Instituto de Física Teórica (IFT), Universidade Estadual Paulista (UNESP), São Paulo, Brasil*
[3] *Facultad de Ciencias (FC), Universidad Nacional de Ingeniería (UNI), Lima, Perú*

E-mail: [a]oacevedos@unmsm.edu.pe, [b]bruto.max@unesp.br, [c]alexander.trigoso.s@uni.pe

Resumen

En la construcción del espacio-tiempo afín de Galileo se considera la existencia de los sistemas de referencia inerciales (SRI), siendo estos una base para la gravedad newtoniana. La ausencia de verificación experimental de los SRI y la universalidad de la gravedad motivan la transición hacia un espacio-tiempo como variedad diferenciable en el que la gravedad está geometrizada. Esto conduce a la teoría de Newton-Cartan (TNC) [1], [2], la cual al mantener la noción del tiempo absoluto, usa dos tensores "métricos". Las ecuaciones fundamentales se obtienen inicialmente mediante un análisis en el que se distingue entre un SRI y un SRnI. A partir de estos resultados heurísticos, se postulan los axiomas de forma completamente covariante. Finalmente, las soluciones de la TNC incluyen a las de la gravedad newtoniana solo bajo la condición de rotación absoluta de Trautman.

1. Espacio-tiempo afín de Galileo

El espacio-tiempo de Galileo en su versión afín se construye bajo la noción de tiempo absoluto, el teleparalelismo espacial y el principio de relatividad de Galileo, véase la Figura 1.

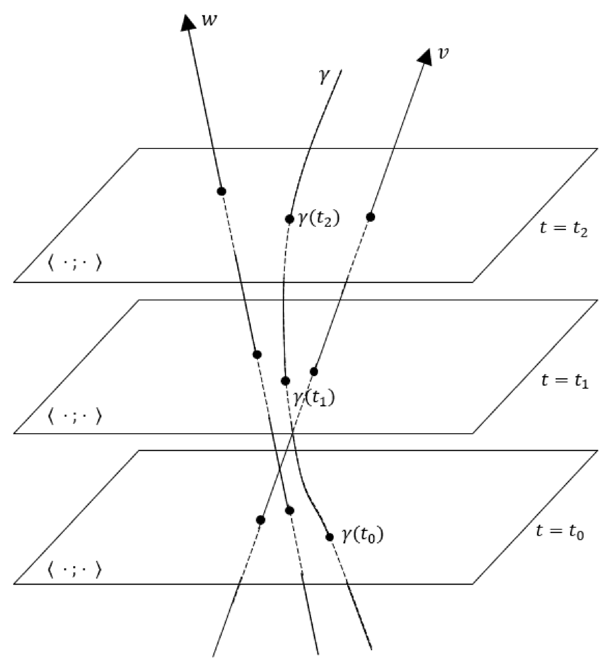

Figura 1: Espacio-tiempo afín de Galileo (2+1)-dimensional. Dos observadores inerciales v y w pueden describir el movimiento de una partícula cuya línea de mundo γ intersecta en $\gamma(t_0)$, $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$ en los espacios de eventos simultáneos de $t = t_0$, t_1 y t_2. Cada uno de estos espacios preserva el producto interior $\langle\cdot;\cdot\rangle$.

Solo así, se deriva la siguiente estructura del espacio-tiempo:

Definición 1. *Un espacio-tiempo de Galileo es un terna* $(\mathbb{A}^4;\tau;\langle\cdot;\cdot\rangle_{\mathrm{preim}_\tau(0)})$*, con un mapa lineal* $\tau:\mathbb{R}^4_{vec}\to\mathbb{R}$ *y* $\langle\cdot;\cdot\rangle_{\mathrm{preim}_\tau(0)}$ *un producto interior sobre el espacio vectorial* $\mathrm{preim}_\tau(0)$. ■

Esta definición excluye la noción de reposo absoluto, haciéndola dependiente del observador. En particular, los observadores inerciales se definen según:

Definición 2. *En un espacio-tiempo de Galileo, un observador es inercial si su línea de mundo es una curva de la forma,*

$$\gamma(t) = x + t\,\hat{\mathfrak{t}}\,, \tag{1}$$

donde $\hat{\mathfrak{t}}\in\mathbb{R}^4_{vec}$ *que cumple* $\tau(\hat{\mathfrak{t}}) = 1$. ■

Para problemas gravitacionales, la teoría de Newton es aplicable únicamente cuando se formulan en SRI, los cuales en este modelo están caracterizados por $\hat{\mathfrak{t}}$.

2. Fenomenología y principio de equivalencia

La fenomenología resalta la comprensión de los fenómenos a partir de sus apariencias. En este contexto, los SRI presentan una dificultad, ya que no son empíricamente observables, sino que son abordados de manera aproximada. Así, requerimos una reformulación de la teoría que elimine a los SRI y sea válida para cualquier observador.

Debido a la universalidad de la caída libre (afecta a todos los cuerpos y es válida para todos los observadores), los sistemas de referencia más generales posibles serán aquellos precisamente en caída libre. Todas las partículas en caída libre serán redefinidas como partículas libres; por consiguiente, la gravedad como fuerza quedará excluida.

Fenomenológicamente hablando, la gravedad "es" el conjunto de todas las trayectorias de los cuerpos en caída libre. El estudio de la gravedad entonces debe estar en el estudio de las trayectorias de los cuerpos en caída libre. Luego, si generalizamos la recta afín de una partícula libre a una geodésica en un espacio-tiempo como variedad diferenciable, encontraremos que la gravedad queda codificada por los coeficientes de conexión definida a partir de la geodésica. Todo este nuevo planteamiento resulta en la reformulación siguiente:

Axioma 1. *Una partícula libre es aquella que se mueve uniformemente sobre una curva geodésica del espacio-tiempo.* ■

3. Geometrización heurística de la gravedad newtoniana

Usando coordenadas cartesianas (t, x) en un SRI, la ecuación de una partícula libre es

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \frac{\partial\phi}{\partial x^i} = 0 \tag{2}$$

con $\phi = \phi(t;\vec{x})$ el potencial gravitatorio. Dado que la ecuación 2 representa una geodésica, se reconoce que los coeficientes de conexión no nulos son $\Gamma^i_{00} = \partial_i\phi$.

Empleando las transformaciones del grupo de línea de Galileo, en las coordenadas cartesianas (t', x') para un SRnI también se puede llegar a identificar los coeficientes de conexión [3]. Aquellos no nulos son

$$\Gamma'^l_{0k} = \Gamma^l_{k0} = A_{lj}(t'-b)\dot{A}_{kj}(t'-b)\,, \tag{3}$$

$$\Gamma'^l_{00} = \delta^{lk}\frac{\partial\phi'}{\partial x'^k} + A_{lj}(t'-b)\ddot{A}_{kj}(t'-b)x'^k\,, \tag{4}$$

donde b es el desplazamiento temporal, A_{ij} una componente de una matriz de rotación, a^k una componente de la traslación espacial y ϕ' el potencial gravitatorio visto por el SRnI.

La ecuación necesaria para heredar la gravitación de Newton es aquella que relaciona ϕ, o sea, los coeficientes de conexión obtenidos arriba con la ecuación de Poisson. Tanto para un SRI o un SRnI, dicha ecuación es

$$R_{00} = 4\pi G\rho\,, \tag{5}$$

donde R_{00} es la única componente no nula del tensor de Ricci, G la constante de gravitación universal y ρ la densidad de masa generadora del campo gravitatorio.

El abordar un espacio-tiempo como variedad diferenciable exige, naturalmente, el paso del mapa reloj y el producto interior $\langle\cdot;\cdot\rangle_{\mathrm{preim}_\tau(0)}$ hacia una $1-$forma cerrada τ y un tensor h de tipo $(2;0)$ tal que sea simétrico con signatura $(0,1,1,1)$. Dichos tensores satisfacen

$$t_\mu h^{\mu\nu} = 0\,. \tag{6}$$

Además, el tensor h induce una subida de índices que conlleva a deducir tanto desde un SRI cuanto desde un SRnI:

$$R^{i\ j}_{\ 0\ 0} = R^{j\ i}_{\ 0\ 0}\,. \tag{7}$$

4. Teoría de Newton-Cartan

Desprendiendo el uso de los SRI por ser inexistentes en la fenomenología, elevamos los resultados geométricos de la heurística a una forma completamente covariante. Así postulamos [4]:

1. El espacio-tiempo es una variedad de Newton $(3+1)-$dimensional $(\mathcal{M};\tau;h;\nabla)$, donde $\tau\in\Omega(\mathcal{M})$ es una 1-forma cerrada, $h\in\Gamma(T^2_0\mathcal{M})$ es un tensor simétrico con signatura $(0,1,1,1)$ y ∇ es una conexión compatible con τ y h. Además, se satisfacen
$$\tau_\mu h^{\mu\nu} = 0,\ R^{\rho\ \ \sigma}_{\ \mu\ \ \nu} = R^{\sigma\ \ \rho}_{\ \nu\ \ \mu}\,.$$
2. Las medidas temporales son definidas a partir de τ, mientras que las medidas espaciales se hacen a partir ${}^{(3)}h$, inducidas por h.
3. Las ecuaciones de campo de Newton-Cartan son
$$R_{\mu\nu} = 4\pi G\rho\tau_\mu\tau_\nu\,. \tag{8}$$
4. Las partículas libres se mueven sobre geodésicas tipo tiempo de ∇.
5. Sobre cada evento del espacio-tiempo y dado un vector tipo tiempo u, solo existe un campo vectorial de referencia que pase por este evento con una velocidad paralela a u.

Para identificar a las conexiones de Galileo se introduce un *campo vectorial de referencia* $v\in\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ que cumpla $\tau(v) = 1$. Luego, se construyen la *métrica covariante espacial* $\underset{v}{h}$, y la *forma de Newton-Coriolis* $\Omega\in\Gamma(T^0_2\mathcal{M})$ como

$$\Omega_{\mu\nu} := 2(\nabla_{[\mu}v^\lambda)h_{\nu]\lambda}\,. \tag{9}$$

De este modo, se demuestra que los coeficientes de la conexión de Galileo son

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = v^\rho\partial_{(\mu}\tau_{\nu)} + \frac{1}{2}h^{\rho\sigma}\left(\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}\right) + \tau_{(\mu}\Omega_{\nu)}^{\ \ \sigma} - T_{(\nu\mu)}^{\ \ \ \ \sigma} + \frac{1}{2}T^\rho_{\ \mu\nu}\,, \tag{10}$$

con T la torsión de ∇.

5. Teoremas de recuperación

La recuperación total de la gravitación newtoniana, solo será posible si además de los postulados de arriba se exige que la variedad de Newton sea espacialmente plana y el tensor de curvatura cumpla

$$R^{\mu\nu}_{\ \ \ \rho\sigma} = 0\,. \tag{11}$$

La condición anterior se conoce como condición de *rotación absoluta de Trautman*. De esta manera se garantiza la existencia de un campo vectorial de referencia rígido v libre de vorticidad $(\omega = 0)$ y una función local ϕ sobre $\mathcal{M}$ tales que cumplen:

1. ϕ satisface
$$\overset{v}{\nabla}_\mu\overset{v}{\nabla}{}^\mu\phi = 4\pi G\rho\,, \tag{12}$$
donde $\overset{v}{\nabla}$ la conexión de Galileo libre de torsión $(T = 0)$ con forma de Newton-Coriolis nula .
2. Una curva tipo tiempo γ parametrizada por el tiempo absoluto es una geodésica de ∇ si y solo si
$$(\overset{v}{\nabla}_{\dot\gamma}\,\dot\gamma)^\nu = -\overset{v}{\nabla}{}^\nu\phi\,. \tag{13}$$

Sin imponer el criterio de Trautman, se obtiene el teorema de Künzle-Ehlers, cuyas soluciones admitidas incluyen a la gravedad newtoniana, aunque en general no poseen un análogo newtoniano.

6. Conclusiones

El problema fenomenológico de formular al espacio-tiempo afín de Galileo reside en su consideración de SRI. Esto se supera geometrizando la gravedad, la cual tiene lugar en virtud del principio de equivalencia y permite una formulación covariante. Los axiomas de la TNC se obtienen elevando los resultados heurísticos en el que se ha dispensado por completo a los SRI. La recuperación de la teoría newtoniana solo se da bajo la condición de rotación absoluta.

Referencias

[1] É. Cartan, "Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (première partie) (Suite)," *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, vol. 41, págs. 1-25, 1924. DOI: `10.24033/asens.753`.

[2] A. Anile, "Espaço-tempo," en *Enciclopédia Einaudi, Volume 29: Tempo / Temporalidade*, Lisboa: Imprensa Nacional–Casa da Moeda, 1993.

[3] L. Rodriguez, J. S. Germaine-Fuller y S. Wickramasekara, *Newton-Cartan Gravity in Noninertial Reference Frames*, Disponible en: `https://arxiv.org/abs/1412.8655`, 2014. arXiv: `1412.8655 [gr-qc]`.

[4] P. K. Schwartz, *Newton–Cartan Gravity: A Modern Introduction to Geometrised Newtonian Gravity*. Springer, 2026, To be published.