



# Sombra del Agujero Negro de Schwarzschild

## Análisis de Trayectorias de Fotones

D. Sánchez M., C. Chamorro S., M. Matias T., T. Vargas

Grupo de Física Teórica - Física de Altas Energías (GFT-HEP)

Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos

daniel.sanchez11@unmsm.edu.pe, cristhian.chamorro@unmsm.edu.pe,

marcelo.matias@unmsm.edu.pe



### Resumen

Análisis teórico de trayectorias de fotones en espacio-tiempo de Schwarzschild, determinando: radio de esfera de fotones, parámetro de impacto crítico y ángulo de escape. Las trayectorias se describen mediante geodésicas nulas en plano ecuatorial usando constantes de movimiento energía ( $k$ ) y momento angular ( $h$ ). Este estudio fundamenta la obtención teórica de la sombra del agujero negro, simulable computacionalmente en Python.

### 1. Introducción

La sombra de un agujero negro de Schwarzschild es manifestación observable de efectos de relatividad general. Región oscura rodeada por anillo de luz desviada, resultado de captura de fotones por campo gravitatorio extremo.

### 2. Ecuaciones de Trayectoria

Trayectorias de fotones: geodésicas nulas ( $ds^2 = 0$ ) en plano ecuatorial ( $\theta = \pi/2$ ).

#### Constantes de Movimiento

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} = k \quad (\text{Energía})$$

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = h \quad (\text{Momento angular})$$

#### Ecuación Orbital

Con  $u = 1/r$ :

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - 2\mu u^3 = \frac{c^2 k^2}{h^2} \quad (1)$$

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3\mu u^2 \quad (\text{Ecuación diferencial orbital}) \quad (2)$$

### 3. Potencial Efectivo y Esfera de Fotones

#### Potencial Efectivo

Con parámetro de impacto  $b = h/(ck)$ :

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \quad (3)$$

$$\frac{\dot{r}^2}{h^2} + V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{b^2} \quad (4)$$

#### Radio Esfera de Fotones

Órbitas circulares:  $\partial V_{\text{eff}}/\partial r = 0 \Rightarrow r = 3\mu$

$$r_c = 3\mu = \frac{3GM}{c^2} = \frac{3}{2}r_s \quad (5)$$

con  $r_s = 2\mu = 2GM/c^2$  (radio de Schwarzschild).

**Nota:** Órbita inestable.

### 4. Trayectorias de Fotones

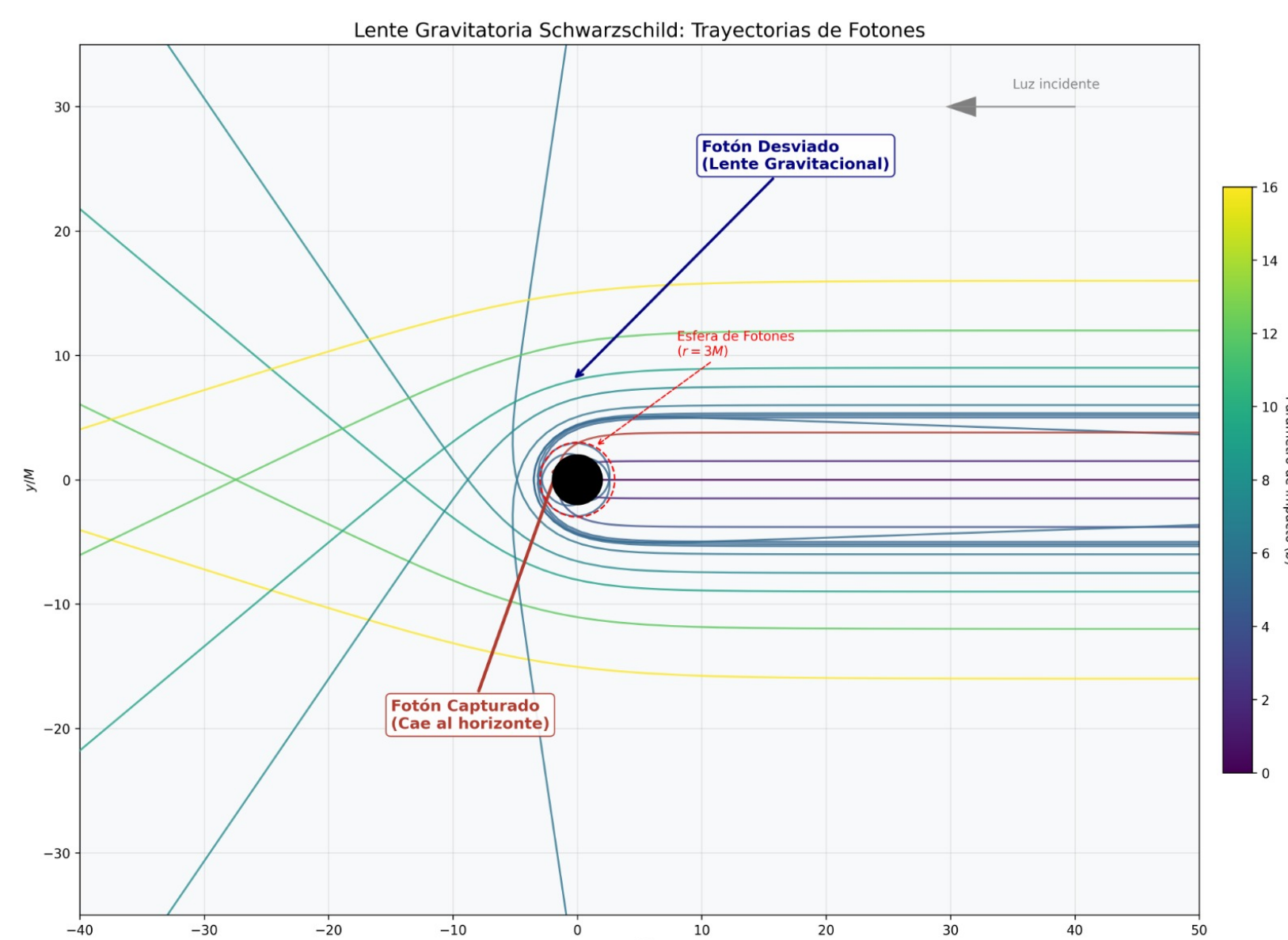


Figura 1: Trayectorias de fotones alrededor del agujero negro de Schwarzschild.

#### Tipos de Trayectorias

- **Fotón desviado:** Lente gravitacional (exterior esfera de fotones)
- **Fotón capturado:** Cae al horizonte (interior esfera de fotones)
- **Esfera de fotones:**  $r = 3M$  (órbita circular inestable)

### 5. Parámetro de Impacto Crítico

Máximo de  $V_{\text{eff}}$ :  $V_{\text{eff}}(r_c) = 1/(27\mu^2)$

$$\frac{1}{b_c^2} = \frac{1}{27\mu^2} \Rightarrow b_c = 3\sqrt{3}\mu \quad (6)$$

$$b_c = \frac{3\sqrt{3}}{2}r_s \approx 2,6r_s \quad (7)$$

#### Clasificación Trayectorias

- $b < b_c$ : Fotón cae al horizonte (ver Figura 1)
- $b = b_c$ : Órbita inestable en  $r_c$
- $b > b_c$ : Fotón escapa con deflexión (ver Figura 1)

### 6. Ángulo Crítico y Conos de Escape

#### Ángulo Crítico de Escape

Para observador estático en  $r$ :

$$\sin \psi_c = \frac{b_c}{r} \sqrt{1 - \frac{2\mu}{r}} = \frac{3\sqrt{3}\mu}{r} \sqrt{1 - \frac{2\mu}{r}} \quad (8)$$

#### Conos de Escape Schwarzschild

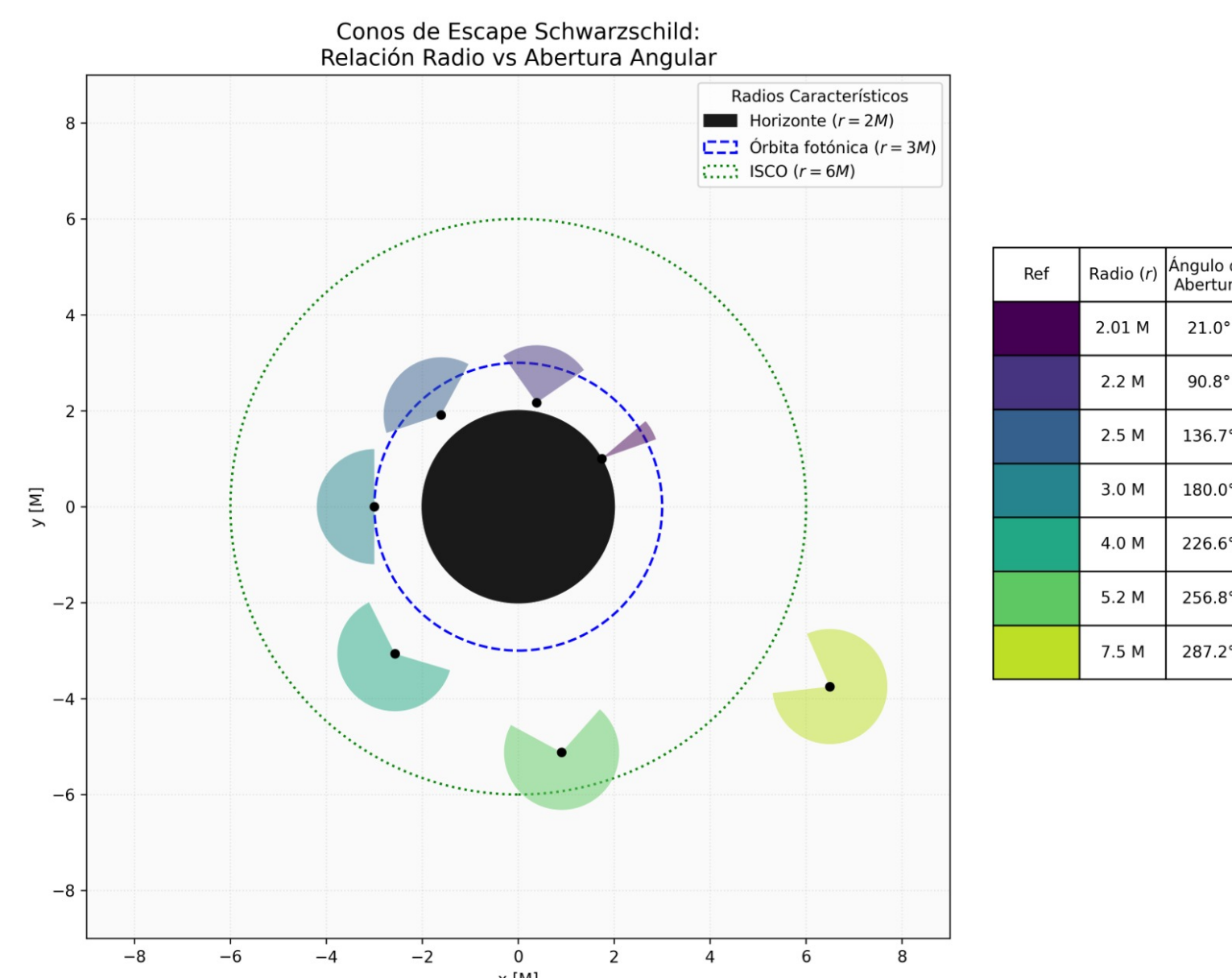


Figura 2: Conos de escape alrededor del agujero negro.

### 7. Sombra y Perspectivas

#### Tamaño Angular

Para observador distante ( $D \gg r_s$ ):

$$\theta_{\text{sombra}} \approx \frac{b_c}{D} = \frac{3\sqrt{3}GM}{c^2 D} \quad (9)$$

#### Parámetros Clave

| Parámetro                     | Valor (en $r_s$ ) | M87* (Valor real)              |
|-------------------------------|-------------------|--------------------------------|
| Radio Schwarzschild ( $r_s$ ) | 1.0               | $\approx 1,9 \times 10^{13}$ m |
| Esfera de fotones ( $r_c$ )   | 1.5               | $\approx 2,8 \times 10^{13}$ m |
| Parámetro crítico ( $b_c$ )   | 2.6               | $\approx 5,0 \times 10^{13}$ m |
| Masa                          | -                 | $6,5 \times 10^9 M_\odot$      |
| Distancia                     | -                 | 16,8 Mpc                       |
| Tamaño angular sombra         | -                 | $42 \pm 3 \mu\text{as}$        |

Tabla 1: Parámetros característicos para agujero negro teórico y M87\* (Event Horizon Telescope 2019).

#### Observación Histórica



Figura 3: Primera imagen del agujero negro supermasivo M87\* obtenida por el Event Horizon Telescope (EHT) en abril de 2019.

### 9. Conclusiones

- Las ecuaciones de movimiento para fotones en métrica de Schwarzschild predicen existencia de esfera de fotones en  $r = 3GM/c^2$
- Parámetro de impacto crítico  $b_c = 3\sqrt{3}GM/c^2$  define sombra del agujero negro

#### Perspectivas Futuras:

- Extensión a agujeros negros de Kerr (rotación)
- Análisis de polarización de emisión de M87\*
- Observaciones del centro galáctico (Sgr A\*)
- Mejoras en resolución angular con nuevos telescopios

### Referencias

- Schwarzschild, K. (1916). *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*
- Chandrasekhar, S. (1983). *The Mathematical Theory of Black Holes*.
- Event Horizon Telescope Collaboration (2019). *ApJ Letters*, 875, L1.
- Event Horizon Telescope Collaboration (2019). *ApJ Letters*, 875, L2-L6.
- Misner, Thorne, Wheeler (1973). *Gravitation*.
- Wald, R. M. (1984). *General Relativity*.