Comparación de potenciales y geodésicas en Schwarzschild–PFDM y Reissner–Nordström con horizontes coincidentes

Ricardo Angelo Ballon Tito[1] **Rolando Moisés Perca Gonzales**[2]

[1]Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, Facultad de Ciencias Naturales y Formales, Escuela Profesional de Física, Av. Independencia S/N, Arequipa 04000, Peru.
ORCID: 0000-0002-5438-7699; Email: rballont@unsa.edu.pe.

[2]Departamento Académico de Física, Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, Arequipa 04004, Peru.
ORCID: 0000-0001-5734-7310; Email: rperca@unsa.edu.pe.

Resumen

Se comparan las geometrías de Schwarzschild con materia oscura tipo fluido perfecto (Schwarzschild–PFDM) y Reissner–Nordström (RN), ajustando sus parámetros de tal forma que ambas tienen los mismos horizontes tanto interno y externo. A partir de sus potenciales efectivos, se analizan las órbitas circulares de partículas masivas neutras y fotones, determinando los radios de la esfera de fotones, la órbita circular estable más interna (ISCO) y los parámetros de impacto críticos. Asimismo, se integran numéricamente las ecuaciones geodésicas mediante el método de Runge–Kutta de cuarto orden (RK4), con el propósito de comparar las trayectorias y los procesos de captura y dispersión.

Para una configuración de RN con $|Q|/M_{\mathrm{RN}} = 0.9$, se encuentra que Schwarzschild–PFDM presenta una esfera de fotones con un 5.29 % mayor, un radio ISCO con un 1.90 % menor y un parámetro de impacto crítico con un 23.63 % mayor respecto de RN. Además, se identifican las condiciones bajo las cuales un fotón es capturado en Schwarzschild–PFDM, mientras que en RN experimenta dispersión. Estos resultados muestran que dos geometrías con horizontes coincidentes pueden presentar diferencias significativas en su comportamiento geodésico.

Palabras clave: Schwarzschild–PFDM; Reissner–Nordström; horizontes; geodésicas; órbitas circulares; Runge–Kutta.

1. Introducción

La caracterización de órbitas para partículas masivas y para fotones constituye una herramienta para comparar las propiedades geométricas de espacios-tiempos estáticos y esféricamente simétricos. Específicamente, los radios de las órbitas circulares, la posición de la esfera de fotones y las condiciones de captura están determinados por la función métrica, no únicamente por las posiciones de sus horizontes [1, 3].

El modelo de Schwarzschild con un término logarítmico asociado a materia oscura tipo fluido perfecto (PFDM) modifica la función radial usual de Schwarzschild; la geometría de Reissner–Nordström, por su parte, incorpora una contribución de carga eléctrica [2, 5]. En lugar de comparar ambas métricas con parámetros de masa iguales, aquí se propone fijar *los dos radios de horizonte* y analizar qué diferencias geodésicas persisten. Esto permite aislar el hecho de que compartir la estructura de horizontes no implica compartir los mismos potenciales efectivos.

Presentamos cuatro emparejamientos de horizontes y, para una configuración representativa, estudiamos trayectorias ligadas y fotones entrantes mediante integración RK4. Con el fin de concentrar la exposición en los resultados físicos, las magnitudes orbitales se comparan mediante tablas y las geodésicas RK4 se presentan adicionalmente en figuras.

2. Geometrías con horizontes coincidentes

2.1. Funciones métricas

En unidades geométricas $G = c = 1$, consideramos

$$ds^2 = -f(r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2). \tag{2.1}$$

Fijamos una escala de longitud común M_0 y definimos $x = r/M_0$. Para la geometría Schwarzschild–PFDM elegimos el sector $\gamma < 0$ y escribimos

$$f_{\rm P}(x) = 1 - \frac{2}{x} - \frac{p}{x}\ln\!\left(\frac{x}{p}\right), \qquad p = -\frac{\gamma}{M_0}, \quad 0 < p < 2. \tag{2.2}$$

Las raíces positivas de $f_{\rm P}$ satisfacen

$$H_p(x) \equiv x - 2 - p\ln(x/p) = 0. \tag{2.3}$$

Dado que $H_p'(x) = 1 - p/x$, $H_p''(x) = p/x^2 > 0$ y $H_p(p) = p - 2 < 0$, existen exactamente dos raíces positivas $a < p < b$. Los radios físicos de horizonte son $r_- = aM_0$ y $r_+ = bM_0$.

Para RN se tiene

$$f_{\rm R}(x) = 1 - \frac{2\mu}{x} + \frac{\widetilde{Q}^{\,2}}{x^2}, \qquad \mu = \frac{M_{\rm RN}}{M_0}, \quad \widetilde{Q} = \frac{|Q|}{M_0}. \tag{2.4}$$

La coincidencia exacta de los dos horizontes se logra imponiendo

$$\boxed{\mu = \frac{a+b}{2}, \qquad \widetilde{Q} = \sqrt{ab}}, \quad \Rightarrow \quad f_{\rm R}(x) = \left(1 - \frac{a}{x}\right)\left(1 - \frac{b}{x}\right). \tag{2.5}$$

Obsérvese que $M_{\rm RN}$ no tiene por qué coincidir con M_0. La tabla 1 muestra cuatro configuraciones construidas mediante esta correspondencia.

Tabla 1: Parámetros de las geometrías con dos horizontes exactamente coincidentes. Las entradas son adimensionales y están redondeadas para su presentación; la igualdad se establece mediante la Ec. (2.5).

$q_{\rm RN}$	γ/M_0	$M_{\rm RN}/M_0$	$\lvert Q\rvert/M_0$	r_-/M_0	r_+/M_0
0.50	-1.114409	1.694672	0.847336	0.227043	3.162302
0.70	-1.444720	1.811786	1.268250	0.517912	3.105660
0.90	-1.805356	1.934809	1.741328	1.091445	2.778173
0.95	-1.901364	1.967046	1.868693	1.352836	2.581255

2.2. Diferencia exterior entre las funciones métricas

La coincidencia de a y b no implica igualdad de las métricas. En efecto, si definimos $G(x) = x[f_{\rm P}(x) - f_{\rm R}(x)]$, resulta

$$G'(x) = \frac{ab - px}{x^2}, \qquad G(a) = G(b) = 0. \tag{2.6}$$

Como $a < p < b$, el único máximo de G se encuentra en $x = ab/p \in (a, b)$. Fuera del horizonte exterior, G es decreciente y $G(x) < 0$ para todo $x > b$. En consecuencia,

$$\boxed{f_{\rm P}(x) < f_{\rm R}(x), \qquad x > b.} \tag{2.7}$$

Esta desigualdad permite anticipar diferencias en los potenciales efectivos sin recurrir a interpretaciones de gráficas.

3. Potenciales efectivos y órbitas circulares

En el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, las constantes de movimiento son $E = f(r)\dot{t}$ y $j = r^2\dot{\phi}$. La ecuación radial para una geodésica de prueba puede escribirse como

$$\dot{r}^{\,2} + V_\kappa(r) = E^2, \qquad V_\kappa(r) = f(r)\left(\kappa + \frac{j^2}{r^2}\right), \quad \kappa = \begin{cases} 1, & \text{partícula masiva neutra,} \\ 0, & \text{fotón.} \end{cases} \tag{3.1}$$

El parámetro de diferenciación es el tiempo propio en el caso masivo y un parámetro afín para fotones. Para las mismas constantes j y κ, la Ec. (2.7) implica

$$V_\kappa^{\mathrm{PFDM}}(r) < V_\kappa^{\mathrm{RN}}(r), \qquad r > r_+. \tag{3.2}$$

Las órbitas circulares masivas satisfacen $V_1' = 0$ y el ISCO se determina, adicionalmente, por $V_1'' = 0$. Expresadas en términos de $f(x)$, las condiciones equivalentes son

$$\ell^2(x) = \frac{x^3 f'(x)}{2f(x) - x f'(x)}, \qquad E^2(x) = \frac{2f(x)^2}{2f(x) - x f'(x)}, \tag{3.3}$$

$$0 = 3ff' + xff'' - 2x(f')^2 \qquad \text{(ISCO)}, \tag{3.4}$$

donde $\ell = j/M_0$ y las primas indican derivadas respecto de x. Para fotones, la esfera fotónica exterior se obtiene de

$$x f'(x) - 2f(x) = 0, \qquad \frac{b_{\mathrm{crit}}}{M_0} = \frac{x_{\mathrm{ph}}}{\sqrt{f(x_{\mathrm{ph}})}}. \tag{3.5}$$

La tabla 2 compara los radios correspondientes a los cuatro pares de horizontes, mientras que la tabla 3 recoge los umbrales de captura fotónica y los momentos angulares específicos en el ISCO. Las diferencias porcentuales se definen siempre respecto de RN: $\Delta_X = 100(X_{\mathrm{PFDM}}/X_{\mathrm{RN}} - 1)\,\%$.

Tabla 2: Radios de esfera fotónica e ISCO en unidades de M_0. P: Schwarzschild–PFDM; R: Reissner–Nordström.

q_{RN}	$r_{\mathrm{ph}}^{\mathrm{P}}$	$r_{\mathrm{ph}}^{\mathrm{R}}$	$\Delta_{\mathrm{ph}}(\,\%)$	$r_{\mathrm{ISCO}}^{\mathrm{P}}$	$r_{\mathrm{ISCO}}^{\mathrm{R}}$	$\Delta_{\mathrm{ISCO}}(\,\%)$
0.50	4.9277	4.7838	+3.01	9.1543	9.5014	-3.65
0.70	4.9435	4.7595	+3.87	9.0884	9.3945	-3.26
0.90	4.6725	4.4379	+5.29	8.5673	8.7332	-1.90
0.95	4.5173	4.2628	+5.97	8.3163	8.4192	-1.22

Tabla 3: Parámetros de impacto críticos b_{crit}/M_0 y momentos angulares j_{ISCO}/M_0, en el mismo sistema de unidades.

q_{RN}	$b_{\mathrm{crit}}^{\mathrm{P}}$	$b_{\mathrm{crit}}^{\mathrm{R}}$	$\Delta_b(\,\%)$	$j_{\mathrm{ISCO}}^{\mathrm{P}}$	$j_{\mathrm{ISCO}}^{\mathrm{R}}$
0.50	9.7024	8.4190	+15.24	6.5147	5.6564
0.70	10.1778	8.5529	+19.00	6.8524	5.8017
0.90	10.3314	8.3569	+23.63	6.9974	5.7809
0.95	10.2818	8.2147	+25.16	6.9852	5.7331

En la configuración $|Q|/M_{\mathrm{RN}} = 0.9$, los valores de las tablas 2 y 3 muestran diferencias de $+5.29\,\%$ para la esfera fotónica, $-1.90\,\%$ para el ISCO y $+23.63\,\%$ para b_{crit}. Además, para un mismo $j = 6M_0$, RN admite un mínimo estable de V_1 en la región exterior, mientras que Schwarzschild–PFDM no lo presenta, puesto que $j_{\mathrm{ISCO}}^{\mathrm{RN}} = 5.7809M_0 < 6M_0 < j_{\mathrm{ISCO}}^{\mathrm{PFDM}} = 6.9974M_0$.

3.1. Separación de umbrales fotónicos

En el exterior, $U(x) = f(x)/x^2$ es positivo y se anula tanto en el horizonte como asintóticamente. De la desigualdad estricta $U_{\mathrm{PFDM}}(x) < U_{\mathrm{RN}}(x)$ se deduce que sus máximos satisfacen $U_{\mathrm{máx}}^{\mathrm{PFDM}} < U_{\mathrm{máx}}^{\mathrm{RN}}$; por tanto,

$$\boxed{b_{\mathrm{crit}}^{\mathrm{PFDM}} > b_{\mathrm{crit}}^{\mathrm{RN}}}. \tag{3.6}$$

Así, para un fotón entrante lanzado desde un radio exterior permitido, el intervalo

$$b_{\mathrm{crit}}^{\mathrm{RN}} < b_{\mathrm{imp}} < b_{\mathrm{crit}}^{\mathrm{PFDM}} \tag{3.7}$$

separa los comportamientos: dispersión en RN y captura en Schwarzschild–PFDM. La tabla 5 presenta un caso integrado numéricamente.

4. Integración numérica mediante Runge–Kutta de cuarto orden

Para describir las trayectorias se evoluciona el estado $\mathbf{y} = (r, u_r, \phi)$ mediante

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\lambda} = \begin{pmatrix} u_r \\ -\frac{1}{2}\, dV_\kappa/dr \\ j/r^2 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

con $\lambda = \tau$ en el caso masivo. Se utiliza el algoritmo clásico RK4 de paso fijo,

$$\begin{aligned} k_1 &= F(y_n), & k_2 &= F(y_n + \tfrac{h}{2}k_1), \\ k_3 &= F(y_n + \tfrac{h}{2}k_2), & k_4 &= F(y_n + hk_3), \\ y_{n+1} &= y_n + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Se verifica la conservación de la restricción radial de la Ec. (3.1) en cada integración. Las ecuaciones se implementan independientemente para cada función métrica, manteniendo los parámetros físicos de comparación previamente establecidos. Para las órbitas masivas se emplea $h = 0.04M_0$ hasta $\tau = 1600M_0$; para los fotones se utiliza $h = 0.005M_0$ hasta identificar captura o retorno exterior. El evento se localiza dentro del último paso RK4.

5. Resultados de las geodésicas

5.1. Partículas masivas: órbitas ligadas

Consideramos $|Q|/M_{\rm RN} = 0.9$, con el mismo radio inicial $r_0 = 20M_0$ y las mismas componentes de velocidad medidas en el marco estático local: $v_{\hat{r}} = 0.04$ y $v_{\hat{\phi}} = 0.37$. Los valores conservados se calculan en cada geometría mediante

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\hat{r}}^2 - v_{\hat{\phi}}^2}}, \qquad E = \Gamma\sqrt{f(r_0)}, \qquad j = \Gamma r_0 v_{\hat{\phi}}, \qquad u_r(0) = E\, v_{\hat{r}}. \tag{5.1}$$

Por tanto, las velocidades físicas locales son comunes, pero E no tiene que ser idéntica en las dos métricas. El periastro y el apoastro se obtienen de las raíces exteriores $E^2 = V_1(r)$ y se contrastan con la trayectoria RK4. Los resultados están en la tabla 4.

Tabla 4: Órbitas masivas ligadas con iguales velocidades locales iniciales. Se indican los puntos de retorno obtenidos del potencial y el máximo residuo absoluto de la restricción radial a lo largo de la integración RK4.

Geometría	E	j/M_0	$r_{\rm peri}/M_0$	$r_{\rm apo}/M_0$	Residuo máximo
Schwarzschild–PFDM	0.890335	7.972675	11.5096	20.5406	$1.0e-15$
RN	0.972100	7.972675	19.4585	46.1818	$5.6e-16$

La Fig. 1 representa las trayectorias integradas. Los valores indican que el periastro en Schwarzschild–PFDM es 40.85 % menor que en RN, y el apoastro es 55.52 % menor. La comparación pone de manifiesto que, aun al fijar los dos horizontes y las mismas velocidades iniciales locales, el intervalo radial de una órbita ligada puede cambiar considerablemente.

5.2. Fotones: captura frente a dispersión

Para las dos geometrías empleamos $r_0 = 20M_0$, energía afín normalizada $E = 1$ y un mismo parámetro de impacto

$$b_{\rm imp} = \frac{j}{E} = 1.1\, b_{\rm crit}^{\rm RN} = 9.1925678\, M_0. \tag{5.2}$$

Las velocidades radiales iniciales vienen dadas en cada modelo por $u_r(0) = -\sqrt{E^2 - j^2 f(r_0)/r_0^2}$ y, por consiguiente, no se supone que coincidan sus componentes locales de velocidad. Se identifica *captura* cuando el fotón entrante alcanza el horizonte exterior, y *dispersión* cuando cruza nuevamente el radio r_0 con velocidad radial saliente después de un punto de retorno. Este criterio define los eventos numéricos consignados en la tabla 5.

La Fig. 2 muestra las geodésicas nulas integradas. El fotón en Schwarzschild–PFDM alcanza el horizonte común $r_+ = 2.7781725M_0$, mientras que en RN retorna desde un periastro de $6.1980M_0$ y es dispersado. Ambos resultados se obtienen con el mismo esquema numérico RK4, y los residuos de la identidad radial se mantienen pequeños en las dos trayectorias.

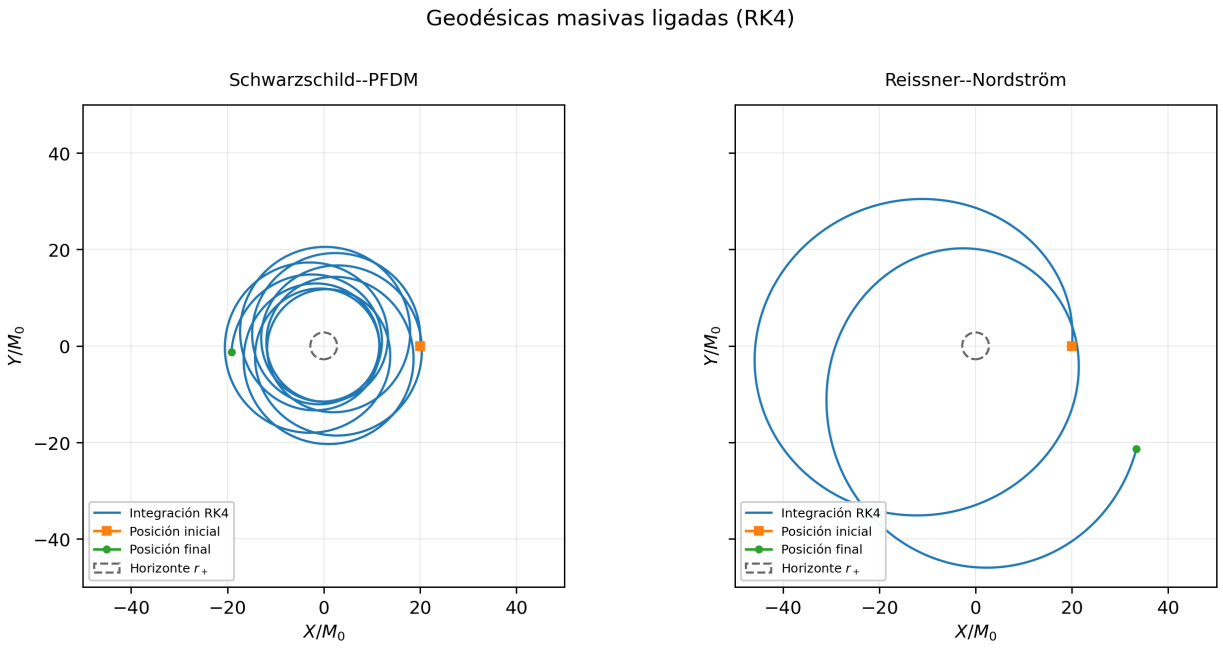


Figura 1: Geodésicas masivas ligadas en Schwarzschild–PFDM (izquierda) y RN (derecha), integradas con RK4. Para ambos casos se usan el mismo radio inicial $r_0 = 20M_0$ y las mismas velocidades locales $v_{\hat{r}} = 0.04$ y $v_{\hat{\phi}} = 0.37$. Los ejes cartesianos se definen como $X = r\cos\phi$, $Y = r\sin\phi$. La circunferencia discontinua corresponde al horizonte exterior común.

Tabla 5: Geodésicas nulas calculadas con RK4 para $r_0 = 20M_0$, $E = 1$ y $b_{\mathrm{imp}} = 9.1925678M_0$. El periastro se indica sólo para la trayectoria dispersada; $\lambda_{\mathrm{evento}}$ es el parámetro afín al cruzar r_+ (captura) o retornar a r_0 (dispersión).

Geometría	b_{crit}/M_0	Resultado	r_{peri}/M_0	$\lambda_{\mathrm{evento}}/M_0$	Residuo máximo
Schwarzschild–PFDM	10.3314	captura	—	23.6255	$8.1e-12$
RN	8.3569	dispersion	6.1980	44.6920	$2.4e-15$

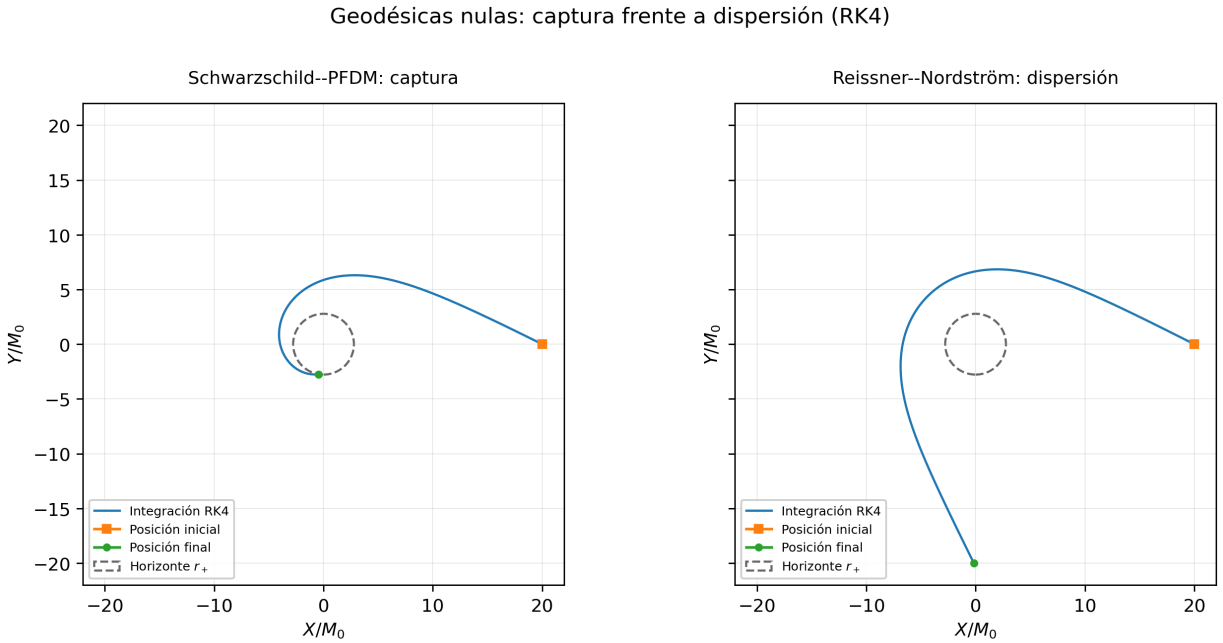


Figura 2: Geodésicas nulas obtenidas con RK4 para el mismo radio inicial $r_0 = 20M_0$, energía afín $E = 1$ y parámetro de impacto $b_{\mathrm{imp}} = 9.1925678M_0$. En Schwarzschild–PFDM el fotón alcanza el horizonte exterior común (captura); en RN gira en su periastro y retorna al radio de salida (dispersión). La circunferencia discontinua marca el horizonte.

6. Discusión y conclusiones

Al establecer una correspondencia mediante dos horizontes comunes, la comparación deja de depender de elegir arbitrariamente el mismo parámetro de masa para geometrías físicamente diferentes. La desigualdad estricta entre funciones métricas demuestra que la coincidencia de los horizontes no obliga a la igualdad de potenciales efectivos; en particular, se deduce una diferencia estricta entre las barreras fotónicas y sus parámetros de impacto críticos.

Para el par con $|Q|/M_{\mathrm{RN}} = 0.9$, los resultados cuantitativos muestran desplazamientos de la esfera de fotones, del ISCO y del umbral de captura. Las integraciones RK4 confirman además diferencias en el intervalo radial de órbitas masivas ligadas y permiten construir un caso en el que un fotón entrante es capturado en Schwarzschild–PFDM y regresa al exterior en RN. Se concluye que fijar exactamente los horizontes interior y exterior no determina por sí solo las propiedades orbitales de estos dos espacios-tiempos.

Referencias

[1] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, 1983).

[2] Z. Xu, X. Hou y J. Wang, "Kerr–anti-de Sitter/de Sitter black hole in perfect fluid dark matter background," *Classical and Quantum Gravity* **35**, 115003 (2018). doi:10.1088/1361-6382/aabcb6.

[3] D. Pugliese, H. Quevedo y R. Ruffini, "Circular motion of neutral test particles in Reissner–Nordström spacetime," *Physical Review D* **83**, 024021 (2011). doi:10.1103/PhysRevD.83.024021.

[4] S. Grunau y V. Kagramanova, "Geodesics of electrically and magnetically charged test particles in the Reissner–Nordström space-time: Analytical solutions," *Physical Review D* **83**, 044009 (2011). doi:10.1103/PhysRevD.83.044009.

[5] C.-K. Qiao y M. Zhou, "Gravitational lensing of Schwarzschild and charged black holes immersed in perfect fluid dark matter halo," *JCAP* **2023**, 005 (2023). doi:10.1088/1475-7516/2023/12/005.

[6] H. C. D. Lima Junior y colaboradores, "Can different black holes cast the same shadow?," *Physical Review D* **103**, 084040 (2021). doi:10.1103/PhysRevD.103.084040.