Prepared for submission to JHEP

Correción Newtoniana a las óbitas de Kepler

Eymi Gabriela Yauri Herrera[1]

[1] *Departamento de Ciencias, Escuela Profesional de Física, Universidad Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco,Av. de La Cultura 773, Cusco, Perú*

E-mail: 170392@unsaac.edu.pe

Abstract: In the first part, planetary orbits are studied using Newton's formulation, it is shown that it describes closed orbits and does not adequately describe the deviation of Mercury's periapsis. I will begin by reducing the motion of two bodies to that of only one in a central field [1] using polar coordinates. We construct the total energy from which we can solve for and consequently replacing in the conservation of angular momentum find the integral of motion that will give us () [1]. Finally we seek the correction of Mercury's periapsis by adding a new term to the Newtonian potential

Contents

1 Introduction

El movimiento de dos particulas interactuantes (*problema de dos cuerpos*) admite una solución general completa, para resolver este problema, primero simplificaremos el movimiento del sistema en dos movimientos: El del centro de masa y el movimiento de las partículas con respecto al centro de masa.Para la interacción de las partículas:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 - U(|r_1 - r_2|)te \tag{1.1}$$

Colocando el origen en el centro de masa $m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$, despejando y remplazando en $r = r_1 - r_2$ (podemos hallar las trayectorias de $r_1 = r_1(t)$ y $r_2 = r_2(t)$ a partir de $r = r(t)$), entonces:

$$r_1 = m_2 r/(m_1 + m_2), \qquad r_2 = -m_1 r/(m_1 + m_2) \tag{1.2}$$

remplazando en 1

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - U(r) \tag{1.3}$$

donde:

$$m = m_1 m_2/(m_1 + m_2) \tag{1.4}$$

se llama *masa reducida.*

Asi reducimos el problema de dos cuerpos, al de una particula en un campo exterior $U(r)$.La fuerza que actua sobre dicha particula será:

$$F = -\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{dU}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

En el movimiento del campo central, el momento angular con respecto al centro se conserva.

$$M = r \times p$$

Como M es perpendicular a r (indicando la constancia de M) entonces, durante todo el movimiento r estará en un mismo plano perpendicular a M.
El lagrangiano en coordenadas polares será:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r) \tag{1.5}$$

ϕ no aparece explicitamente en la Lagrangiana (coordenada *cíclica*), entonces:

$$(d/dt)\partial L/\partial \dot{q}_i = \partial L/\partial q_i = 0$$

$$P_{\dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \rightarrow P_\phi = mr^2\dot{\phi}$$

Donde el ímpetu correspondiente $p_\phi = mr^2\dot{\phi}$, coencide con el momento angular con respecto al al CM, por el cual aplicamos la ley de conservación de momento angular que indica la constancia de la velocidad aereolar.

$$M = mr^2\dot{\phi} = cte. \tag{1.6}$$

Geométricamente, $df = \frac{1}{2}r.rd\phi$("f" área), donde $\dot{f}$ es la *velocidad areolar* De esa manera el momento angular se puede representar como:

$$M = 2m\dot{f} \tag{1.7}$$

Partiendo de la conservación de energía y despejando $\dot{\phi}$ en función de M (6) y llevando este valor a la expresión de la energía, se obtiene:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{M^2}{mr^2} + U(r) \tag{1.8}$$

Por lo tanto,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}} \tag{1.9}$$

y separando las variables e integrando:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + cte. \tag{1.10}$$

Nos da la distancia r de la particula al centro como una función implicita del tiempo.

De (6)

$$d\phi = Mdt/mr^2$$

y sustituimos dt en (9) e integramos:

$$\phi = \int \frac{Mdr/r^2}{\sqrt{2m[E - U(r)] - M^2/r^2}} + cte \tag{1.11}$$

Las fórmulas (10) y (11) dan la solución general al problema propuesto. La expresión (8) indica que la parte radial del movimiento puede considerarse como un movimiento lineal en un campo cuya "energía potencial efectiva" es:

$$U_e f = U(r) + M^2/2mr^2 \tag{1.12}$$

$M^2/2mr^2$es la *energía centrífuga*. Los valores de r determinan los límites de la región de movimiento con respecto a la distancia al centro.

$$U(r) + M^2/2mr^2 = E \tag{1.13}$$

Cuando se satisface la ecuación; $\dot{r}$(velocidad radial) se anula $\dot{r} = 0$, pero no ϕ (velocidad angular)
Durante el tiempo que r tarda en variar de r_{max} a r_{min}, y otra vez de r_{max}, el vector de posición gira un ángulo $\triangle\phi$ que de acuerdo con (11), vale

$$\triangle\phi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{M dr/r^2}{\sqrt{2m[E - U(r)] - M^2/r^2}} \tag{1.14}$$

Cuando la forma un $U(r)$,la trayectoria es arbitrária ($\triangle\phi$ no es una fracción racional de 2π); esto nos dice que el movimiento finito de la partícula no necesariamente es cerrada.

2 Orbitas de Kepler

Considerando un campo de atracción, la energía potencial efectiva será

$$U = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{2.1}$$

para $r = M^2/\alpha m$(pasa por un mínimo),

$$U_{ef,min} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2} \tag{2.2}$$

Sustituyendo en 11 e integrando

$$\phi = \cos^{-1}\frac{(M/r) - (m\alpha/M)}{\sqrt{(2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2})}} + cte. \tag{2.3}$$

Haciendo un cambio de variable $\quad p = M^2/m\alpha, \quad e = \sqrt{1 + (2EM^2/m\alpha^2)}$ se puede escribir la ecuación de la trayectoria de la forma

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\phi \tag{2.4}$$

Ecuación de una sección conica con origen de coordenadas en uno de sus focos; ($\phi = 0$), perihelio de la óbita.

Despejando r y remplazando en (1.14), efecyuando la integración, entonces:

$$\phi = cos^{-1}(-1) \rightarrow \triangle\phi = 2\pi$$

Si $E \leq 0,\;\; e \leq 1$, es decir que la órbita es una elipse y el movimiento es finito.Donde los semiejes mayor y menor son:

$$a = p/(1-e^2) = \alpha/2|E|, \quad b = p/\sqrt{1-e^2} = M/\sqrt{2m|E|} \tag{2.5}$$

Considerando el menor valor posible de la energía ($e = 0$), entonces el eje mayor de la particula solo depende de la energia de la particula y no del momento su momento angular,las distancias máxima y minima al centro del campo (foco de la elipse)

$$r_{min} = p/(1+e) = a(1-e), \;\; r_{max} = p/(1-e) = a(1+e) \tag{2.6}$$

El periodo de revolución T se determina usando el teorema de conservación (7), intengrando con respecto al tiempo de $0 a T$

$$2mf = TM$$

para una elipse $f = \pi ab$, con ayuda de (18)

$$\begin{aligned} T &= 2\pi a^{3/2}\sqrt{m/\alpha} \\ &= \pi\alpha\sqrt{m/2|E|^3} \end{aligned} \tag{2.7}$$

El periodo depende solamente de la energía de la partícula.

3 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Lagrangiana del sistema y la integral (2.1) "la acción".

$$S = \int_{t1}^{t2} L(q, \dot{q}, t)dt \tag{3.1}$$

solo depende de q y $\dot{q}$ ya que el estado mecánico esta completamente definido por sus coordenadas y sus velocidades.

Sea precisamente $q = q(\alpha)$ la función para el cual S es un mínimo Esto significa que S crece cuando se sustituye por una función pequeña (variación).

$$q(\alpha) + \delta q(\alpha) \tag{3.2}$$

Puesto que para todo el intervalo todas las funciones deben tomar los mismos valores, se tiene:

$$\delta q(\alpha_1) = \delta q(\alpha_2) = 0 \tag{3.3}$$

Lo que varia S cuando se remplaza q por $q + \delta q$ está dado por:

$$\int_{t1}^{t2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t)dt - \int_{t1}^{t2} L(q, \dot{q}, t)dt$$

La condición necesaria de mínimo de S es que el conjunto de estos términos se anule, se le llama primera variación de la integral, entonces:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{dq}{\partial q}\left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right) + \frac{d\dot{q}}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial L}{d\dot{q}}\right) + \frac{dt}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial L}{dt}\right)$$

El tiempo (t) no depende de α y $d\dot{q}$ nos incomoda, entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{d\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d\dot{q}}{d\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{q}}\left(\frac{dq}{d\alpha}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{d\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{q}}\left(\frac{dq}{d\alpha}\right) = \frac{d\dot{q}}{d\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \alpha}dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dq}{\partial q}\left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{d\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{q}}\left(\frac{dq}{d\alpha}\right)\right) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \alpha}dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dq}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) - \frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{q}}\left(\frac{dq}{d\alpha}\right)\right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{d\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dq}{d\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{q}}\right)\right) dt = 0$$

En virtud de (3.3), el primer término desaparece; queda una integral que debe anularse para cualquier δq. Esto es posible si el integrando es identicamente nulo, y consecuentemente

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Esto se puede generalizar para "n" grados de libertad

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{3.5}$$

4 Correción de la Relatividad General

$$\Delta\phi = 2\pi + \delta\phi \tag{4.1}$$

$$\delta\phi = \frac{6\pi K m'}{c^2 a(1 - e^2)} \tag{4.2}$$

5 Correccion a la teoría de Newton

Representamos la ecuación (1. 14) considerando de la forma

$$\triangle\phi = -2\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2m(E-U)-M^2/r^2}dr$$

$$\triangle\phi = -2\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2m}\left(E+\frac{\alpha}{r}-\frac{M^2}{r^2 2m}-\right)^{1/2}$$

$$\triangle\phi = -2\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2m}\sqrt{E+\frac{\alpha}{r}-\frac{M^2}{2mr^2}}(1-\frac{\delta U}{\sqrt{E+\frac{\alpha}{r}-\frac{M^2}{2mr^2}}})^{1/2}$$

$$\triangle\phi = -2\sqrt{2m}\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\left(E+\frac{\alpha}{r}-\frac{M^2}{2mr^2}\right)^{1/2}dr+\sqrt{2m}\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\frac{\delta U}{\sqrt{E+\frac{\alpha}{r}-\frac{M^2}{2mr^2}}}dr$$

el primer término nos da 2 π y el segundo término lo representamos de la forma

$$\delta\phi \approx \frac{\sigma}{\partial M}\left(\frac{2m}{M}\right)\int_0^{\pi} r^2\delta U d\phi$$

Landau propone 2 correcciones,
$a)\delta U = \beta/r^2$

$$\delta\phi \approx \frac{\partial}{\partial M}\int_0^{\pi}\frac{2m\beta}{M}d\phi$$

$$\delta\phi \approx -\frac{2m\beta\pi}{M^2} \approx -2\pi\beta/\alpha P$$

$b)r^2\delta U = \lambda/r$

$$\delta\phi \approx \frac{\partial}{\partial M}\int_0^{\pi}\frac{2m\lambda/r}{M}d\phi$$

$$\delta\phi \approx -\frac{6\pi\alpha\lambda m^2}{M^4} \approx -6\pi\lambda/\alpha p^2$$